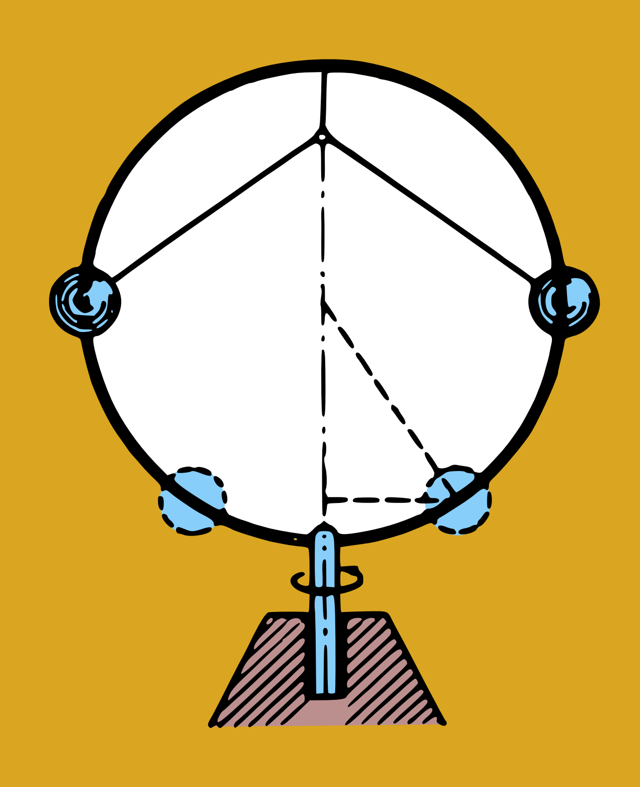
I. Irodov

PRINCIPES FONDAMENTAUX DE LA MÉCANIQUE



Éditions Mir Moscou

И. Е. ИРОДОВ

ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ МЕХАНИКИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ВЫСШАЯ ШКОЛА»
МОСКВА

I. IRODOV

PRINCIPES FONDAMENTAUX DE LA MÉCANIQUE

ÉDITIONS MIR · MOSCOU

Traduit du russe
par V. POLONSKI

Imprimé en Union Soviétique

На французском языке

TABLE DES MATIÈRES

DEUXIÈME PARTIE

MÉCANIQUE RELATIVISTE

PRÉFACE

Ce livre a pour objectif de concentrer l'attention sur les lois *fondamentales* de la mécanique (lois du mouvement et de conservation de l'énergie, de l'impulsion et du moment cinétique), ainsi que d'expliquer *comment* il faut appliquer ces lois dans la résolution de nombreux problèmes concrets. En poursuivant ce but, l'auteur s'est efforcé de dégager l'ouvrage de tout secondaire pour pouvoir fixer l'attention sur les questions les plus difficiles à comprendre.

Le livre compte deux parties, celles de la mécanique classique et de la mécanique relativiste. Dans la première partie les lois de la mécanique sont envisagées à la lumière de l'approximation newtonienne, c'est-à-dire pour le cas des vitesses sensiblement inférieures à celle de la lumière.

Chaque chapitre commence par l'exposé de la théorie relative à la question correspondante, suivi de plusieurs exemples et problèmes les plus suggestifs et présentant un grand intérêt au sens physique, pour montrer comment il faut aborder leur résolution. Les problèmes (on en compte près de 80) sont intimement liés à l'exposé théorique, constituent souvent son développement et son complément, et de ce fait il est aussi important de les étudier que le texte principal.

L'auteur exprime sa gratitude à tous ceux qui lui ont présenté leurs suggestions et contribué ainsi à l'amélioration de l'ouvrage.

En guise de manuel, l'ouvrage est destiné sourtout aux élèves des premières années des écoles supérieures au programme de physique complété. Il peut être également utile aux élèves des dernières années, ainsi qu'aux enseignants des écoles supérieures.

I. Irodov

NOTATIONS

Les *vecteurs* sont notés par des caractères gras droits (par exemple, **r**, **F**) ; les mêmes lettres en caractères clairs (*r*, *F*) indiquent le module du vecteur.

Les *grandeurs moyennes* sont notées par des chevrons ⟨ ⟩; par exemple, ⟨**v**⟩, ⟨*N*⟩.

Les *symboles* Δ, *d*, δ placés devant les grandeurs signifient:

Δ, accroissement fini de la grandeur, c'est-à-dire la différence entre ses valeurs initiale et finale; par exemple, $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$; $\Delta U = U_2 - U_1$;

d, la différentielle (accroissement infinitésimal); par exemple, $d\mathbf{r}$, dU;

δ, la valeur élémentaire de la grandeur; par exemple, δA est le travail élémentaire.

i, **j**, **k** sont les vecteurs unités des coordonnées cartésiennes *x*, *y*, *z*;

$\mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_z$, les vecteurs unités des coordonnées cylindriques ρ, φ, *z*;

n, **τ**, les vecteurs unités de la normale et de la tangente à la trajectoire.

Les *systèmes de référence* (*référentiels ou repères*) sont notés par les lettres en italique *K*, *K'*, *C*.

Le *système de référence C* ou le *référentiel C* est lié au centre d'inertie et se déplace en translation par rapport aux systèmes galiléens. Toutes les grandeurs dans le système *C* sont marquées d'un tilde au-dessus de la lettre; par exemple, $\tilde{p}$, $\tilde{E}$.

A, travail;
c, vitesse de la lumière dans le vide;
E, énergie mécanique totale; énergie totale;
E, intensité du champ électrique;
e, charge électrique élémentaire;
F, force;
G, intensité du champ;

g, accélération de la chute libre;
I, moment d'inertie;
L, moment cinétique par rapport à un point;
L_z, moment cinétique par rapport à un axe;
l, déplacement, bras du vecteur;
M, moment de la force par rapport à un point;
M_z, moment de la force par rapport à un axe;
m, masse ; masse relativiste;
m_0, masse au repos ;
N, puissance;
p, impulsion;
q, charge électrique;
r, rayon vecteur;
s, chemin, intervalle;
t, temps;
T, énergie cinétique;
U, énergie potentielle;
v, vitesse du point ou de la particule;
w, accélération du point ou de la particule;

β, accélération angulaire;
β, vitesse en unités de la vitesse de la lumière;
γ, constante de la gravitation (de l'attraction universelle), facteur de Lorentz;
ε, énergie du photon;
$\varkappa$, coefficient de la force élastique (quasi élastique);
μ, masse réduite;
ρ, rayon de courbure; rayon vecteur de la plus courte distance jusqu'à l'axe; densité;
φ, azimut; potentiel;
ω, vitesse angulaire;
Ω, angle solide.

INTRODUCTION

La mécanique est une branche de la physique qui a pour objet le mouvement mécanique, c'est-à-dire le mouvement dans l'espace et le temps, qui est la forme la plus simple du mouvement de la matière. Le fait que les phénomènes mécaniques se produisent dans l'espace et le temps se manifeste dans toute loi mécanique qui contient des relations spatio-temporelles explicites ou implicites (distances et intervalles de temps).

La position d'un corps dans l'espace ne peut être définie que par rapport à d'autres corps. Ceci concerne également le mouvement d'un corps, c'est-à-dire la variation de sa position au cours du temps. Un corps (ou un système de corps fixes l'un par rapport à l'autre) qui sert à repérer la position du corps envisagé s'appelle repère.

Pour décrire un mouvement on associe au repère un système de coordonnées quelconque, par exemple, le système cartésien. Les coordonnées d'un corps permettent de définir sa position dans l'espace. Le mouvement ayant lieu non seulement dans l'espace, mais aussi dans le temps, sa description impose la mesure du temps, mesure qui se fait à l'aide des chronomètres de tel ou tel type.

L'ensemble du repère, des coordonnées qui lui sont assujetties et des chronomètres synchronisés forme ce qu'on appelle un *système de référence* ou *référentiel*. Cette notion est fondamentale en physique. La description spatio-temporelle du mouvement à l'aide des distances et des intervalles de temps n'est possible qu'après le choix d'un système de référence défini.

L'espace et le temps sont eux-mêmes des objets *physiques* aussi bien que n'importe quels autres, mais des objets infiniment plus importants, plus essentiels. Pour étudier leurs propriétés il faut établir le caractère du mouvement des corps qui s'y trouvent.

L'expérience montre que tant que les vitesses des corps sont petites par rapport à celle de la lumière, le passage d'un référentiel à un autre ne fait pas changer les échelles linéaires et les intervalles de temps, c'est-à-dire ces échelles et ces intervalles ne dépendent pas du choix du référentiel. Ceci a été traduit par la conception newtonienne de l'espace et du temps absolus. La mécanique qui

étudie précisément ces cas des mouvements des corps est dite *classique*.

Mais lorsqu'on passe aux vitesses comparables à celle de la lumière, l'allure du mouvement des corps change radicalement. Les échelles linéaires et les intervalles de temps deviennent *dépendants* du choix du système de référence et sont différents dans des systèmes différents. La mécanique basée sur ces idées est dite *relativiste*. Naturellement, cette dernière est plus générale, et dans le cas particulier de petites vitesses elle est ramenée à la mécanique classique.

Les mouvements réels des corps sont si compliqués que pour les étudier il convient de faire abstraction des détails insignifiants pour les conditions considérées (dans le cas contraire, le problème deviendrait si compliqué qu'il serait pratiquement impossible de le résoudre). A cet effet on utilise des notions (abstractions, idéalisations) dont la possibilité d'être appliquées dépend du problème concret, ainsi que de la précision du résultat à obtenir. Parmi ces notions un grand rôle revient à celles du point matériel et du solide.

Un *point matériel*, ou sommairement, une *particule* est un corps dont les dimensions peuvent être négligées dans les conditions du problème donné. Il est manifeste qu'un même corps peut être envisagé dans certains cas comme un point matériel, et dans d'autres, comme un corps étendu.

Un *corps absolument solide*, ou sommairement, un *solide* est un système de points matériels qui pendant le mouvement gardent constantes leurs distances réciproques. Un corps réel peut être considéré comme absolument solide, si dans les conditions du problème donné ses déformations peuvent être négligées.

La mécanique s'assume deux tâches principales:

1. Etude de différents mouvements et généralisation des résultats obtenus sous la forme de lois qui les régissent, susceptibles de prédire l'allure du mouvement dans chaque cas concret.

2. Recherche des propriétés générales propres à tout système indépendamment du type concret des interactions entre les corps qui le composent.

La résolution du premier problème a conduit Newton et Einstein à établir ce qu'on appelle les lois de la dynamique; celle du deuxième problème a amené les lois de conservation des grandeurs fondamentales, telles que l'énergie, l'impulsion et le moment cinétique.

Ces lois de la dynamique et de conservation de l'énergie, de l'impulsion et du moment cinétique sont les lois fondamentales de la mécanique. Le présent ouvrage se pose pour tâche leur étude.

PREMIÈRE PARTIE

MÉCANIQUE CLASSIQUE

CHAPITRE PREMIER

PRINCIPES DE CINÉMATIQUE

La cinématique est la branche de la mécanique qui étudie les modes de description des mouvements indépendamment de leur origine. Dans le présent chapitre nous étudierons la cinématique d'un point, la cinématique d'un solide et la transformation de la vitesse et de l'accélération lors du passage d'un système de référence à un autre.

§ 1.1. Cinématique du point

Il existe trois modes de description du mouvement d'un point: par les vecteurs, par les coordonnées, et le mode dit naturel. Examinons-les consécutivement.

Mode vectoriel. La position d'un point A est donnée par le rayon vecteur $\mathbf{r}$ mené en A à partir d'un certain point fixe O du référentiel retenu. Lorsque le point A est animé d'un mouvement, dans le cas général son rayon vecteur change aussi bien en module qu'en direction, c'est-à-dire le rayon vecteur $\mathbf{r}$ dépend du temps t. Le lieu géométrique des extrémités du rayon vecteur $\mathbf{r}$ s'appelle *trajectoire* du point A.

Introduisons la notion de *vitesse* du point. Supposons qu'en un temps Δt le point A s'est déplacé du point *1* au point *2* (fig. 1). La figure montre que le *vecteur déplacement* $\Delta\mathbf{r}$ du point A constitue l'accroissement du rayon vecteur $\mathbf{r}$ pendant le temps Δt: $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$. Le rapport $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$ s'appelle *vecteur vitesse moyen* $\langle\mathbf{v}\rangle$ en un temps Δt. Le vecteur $\langle\mathbf{v}\rangle$ coïncide en direction avec $\Delta\mathbf{r}$. Déterminons maintenant le vecteur vitesse $\mathbf{v}$ du point à l'instant donné comme la limite du rapport $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$, avec $\Delta t \to 0$, c'est-à-dire

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \qquad (1.1)$$

Cela signifie que le vecteur vitesse $\mathbf{v}$ du point à l'instant donné est égal à la dérivée du rayon vecteur $\mathbf{r}$ par rapport au temps et est dirigé suivant la tangente à la trajectoire en point donné dans le sens du mouvement du point A (tout comme le vecteur $d\mathbf{r}$). Le

module du vecteur v est égal * à

$$v = |\mathbf{v}| = |d\mathbf{r}/dt|.$$

Le mouvement du point est également défini par l'*accélération*. Le vecteur accélération **w** donne la vitesse de variation du vecteur vitesse du point dans le temps:

$$\mathbf{w} = d\mathbf{v}/dt, \quad (1.2)$$

c'est-à-dire est égal à la dérivée du vecteur vitesse par rapport au temps. La direction du vecteur **w** coïncide avec celle du vecteur $d\mathbf{v}$ qui est l'accroissement du vecteur **v** en un temps dt. Le module du vecteur **w** est déterminé de la même façon que celui du vecteur **v**.

Exemple. Le rayon vecteur d'un point dépend du temps suivant la formule

$$\mathbf{r} = \mathbf{a}t + \mathbf{b}t^2/2,$$

où **a** et **b** sont des vecteurs constants. Cherchons la vitesse **v** et l'accélération **w** du point:

$$\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt = \mathbf{a} + \mathbf{b}t; \quad \mathbf{w} = d\mathbf{v}/dt = \mathbf{b} = \text{const}.$$

Le module du vecteur vitesse

$$v = \sqrt{\mathbf{v}^2} = \sqrt{a^2 + 2\mathbf{ab}t + b^2t^2}.$$

De la sorte, en connaissant la relation $\mathbf{r}(t)$ on peut trouver la vitesse **v** et l'accélération **w** à chaque instant.

On peut résoudre également le problème inverse: trouver $\mathbf{v}(t)$ et $\mathbf{r}(t)$ en connaissant la relation entre l'accélération et le temps.

Il s'avère que pour obtenir une solution univoque de ce problème, la seule relation $\mathbf{w}(t)$ ne suffit pas, il faut encore connaître ce qu'on appelle les *conditions initiales* et plus précisément, la vitesse $\mathbf{v}_0$ et le rayon vecteur $\mathbf{r}_0$ du point à un certain instant initial $t = 0$. Pour nous en convaincre, examinons le cas le plus simple, lorsqu'au cours du mouvement l'accélération du point $\mathbf{w} = \text{const}$.

Déterminons d'abord la vitesse du point $\mathbf{v}(t)$. D'après (1.2) en un intervalle de temps dt l'accroissement élémentaire de la vitesse est $d\mathbf{v} = \mathbf{w}dt$. En intégrant cette expression sur le temps de $t = 0$ à t, on trouve pour ce temps l'accroissement du vecteur vitesse

$$\Delta\mathbf{v} = \int_0^t \mathbf{w}\,dt = \mathbf{w}t.$$

Mais la grandeur $\Delta\mathbf{v}$ n'est pas encore la vitesse **v** cherchée. Pour la trouver il faut connaître la vitesse $\mathbf{v}_0$ à l'instant initial. Donc, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \Delta\mathbf{v}$, ou

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{w}t.$$

* Notons que dans le cas général $|d\mathbf{r}| \neq dr$, où r est le module du rayon vecteur **r**, et $v \neq dr/dt$. Par exemple, si **r** change seulement en direction (le point se déplace suivant un cercle), $r = \text{const}$; $dr = 0$, mais $|d\mathbf{r}| \neq 0$.

Le rayon vecteur **r** (t) d'un point se calcule d'une façon analogue. D'après (1.1), l'accroissement élémentaire du rayon vecteur en un intervalle de temps dt est $d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt$. En intégrant cette expression compte tenu de la relation **v** (t) obtenue, déterminons l'accroissement du rayon vecteur pour un temps allant de $t = 0$ à t:

$$\Delta\mathbf{r} = \int_0^t \mathbf{v}(t)\,dt = \mathbf{v}_0 t + \mathbf{w}t^2/2.$$

Pour trouver le rayon vecteur **r** (t) lui-même il faut connaître encore la position du point $\mathbf{r}_0$ à l'instant initial. Il vient $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \Delta\mathbf{r}$, ou

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{w}t^2/2.$$

Examinons, par exemple, le mouvement d'une pierre lancée sous un certain angle à l'horizon à une vitesse initiale $\mathbf{v}_0$. Si on admet

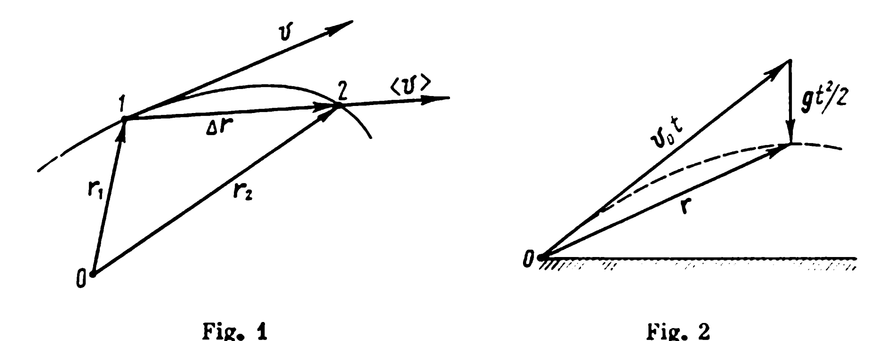


Fig. 1

Fig. 2

que la pierre se déplace avec une accélération constante $\mathbf{w} = \mathbf{g}$, sa position par rapport au point de lancement ($\mathbf{r}_0 = 0$) sera déterminée par le rayon vecteur

$$\mathbf{r} = \mathbf{v}_0 t + \mathbf{g}t^2/2,$$

c'est-à-dire, dans le cas considéré, **r** est la somme de deux vecteurs visualisés sur la figure 2.

Ainsi, pour la résolution totale du problème sur le mouvement d'un point, celui du calcul de sa vitesse **v** et de sa position **r** en fonction du temps, il ne suffit pas de connaître la relation **w** (t), il faut encore connaître les conditions initiales, c'est-à-dire la vitesse $\mathbf{v}_0$ et la position $\mathbf{r}_0$ du point à l'instant initial.

Mode des coordonnées (géométrique). Dans cette méthode on lie invariablement au corps de référence un système de coordonnées défini (cartésien, oblique, curviligne). Le choix d'un tel ou tel système de coordonnées est défini par plusieurs considérations: le caractère ou la symétrie du problème, sa position, ainsi que le désir

de simplifier la solution elle-même. Bornons-nous ici * au système de coordonnées cartésien x, y, z.

Ecrivons les projections sur les axes x, y, z du rayon vecteur **r** (t) caractéristique de la position du point à l'instant t par rapport à l'origine des coordonnées

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t).$$

En connaissant la relation entre ces coordonnées et le temps, c'est-à-dire la *loi du mouvement* du point, on peut trouver la position du point à chaque instant, sa vitesse et son accélération. En effet, en projetant (1.1) et (1.2), par exemple, sur l'axe des x, on obtient les formules qui déterminent les projections des vecteurs vitesse et accélération sur cet axe:

$$v_x = dx/dt, \tag{1.3}$$

où dx est la projection du vecteur déplacement $d\mathbf{r}$ sur l'axe des x:

$$w_x = dv_x/dt = d^2x/dt^2, \tag{1.4}$$

où dv_x est la projection du vecteur accroissement de la vitesse $d\mathbf{v}$ sur l'axe des x. Des relations analogues s'obtiennent pour les projections des vecteurs correspondants sur les axes des y et des z. Ces formules montrent que les projections des vecteurs vitesse et accélération sont égales aux dérivées première et seconde des coordonnées par rapport au temps.

Ainsi, les relations $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ déterminent complètement le mouvement d'un point. Si on les connaît on peut trouver non seulement la position du point, mais encore les projections de sa vitesse et de son accélération, et par suite, le module et la direction des vecteurs **v** et **w** à un instant quelconque. Par exemple, le module du vecteur vitesse

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2};$$

quant à la direction du vecteur **v**, elle est donnée par les cosinus directeurs d'après les formules

$$\cos\alpha = v_x/v; \quad \cos\beta = v_y/v; \quad \cos\gamma = v_z/v,$$

où α, β, γ sont les angles entre le vecteur **v** et les axes des x, des y et des z respectivement. Le module et la direction du vecteur accélération sont déterminés d'une façon analogue.

Par ailleurs, ce mode permet de résoudre plusieurs autres problèmes: calculer la trajectoire d'un point, la relation entre le chemin parcouru par un point et le temps, la relation entre la vitesse et la position d'un point, etc.

La résolution du problème inverse qui consiste à établir la vitesse et la loi du mouvement d'un point d'après l'accélération donnée,

* Nous examinerons en Annexe 1 le mouvement d'un point en coordonnées polaires.

se fait de même que dans le mode vectoriel à l'aide de l'intégration (dans le cas présent de l'intégration sur le temps des projections de l'accélération) ; là encore le problème possède une solution univoque si, en plus de l'accélération, on donne encore les conditions initiales : projections de la vitesse et coordonnées à l'instant initial.

Mode « naturel ». Cette méthode est appliquée lorsque la trajectoire est connue à l'avance. La position du point A est déterminée par le *déplacement* l qui est la distance le long de la trajectoire jusqu'à l'origine O retenue (fig. 3). Dans ces conditions on établit arbitrairement le sens positif de la lecture de la coordonnée (par exemple, suivant la flèche du dessin).

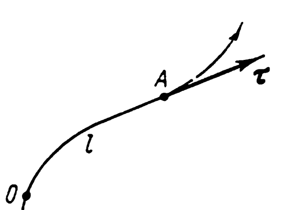


Fig. 3

Le mouvement d'un point est défini si on connaît sa trajectoire, l'origine O, la direction positive du déplacement l et la loi du mouvement du point, c'est-à-dire la relation $l\ (t)$.

Vitesse d'un point. Introduisons le vecteur unité $\boldsymbol{\tau}$ associé au point A en mouvement et orienté suivant la tangente dans le sens de la croissance du déplacement l (fig. 3). Il est clair que $\boldsymbol{\tau}$ est un vecteur variable dépendant de l. Le vecteur vitesse $\mathbf{v}$ du point A est dirigé suivant la tangente à la trajectoire ; on peut donc écrire

$$\boxed{\mathbf{v} = v_\tau \boldsymbol{\tau},} \tag{1.5}$$

où $v_\tau = dl/dt$ est la projection du vecteur $\mathbf{v}$ sur la direction du vecteur $\boldsymbol{\tau}$; de plus, v_τ est une grandeur algébrique. Par ailleurs, il est clair que

$$|v_\tau| = |\mathbf{v}| = v.$$

Accélération d'un point. Dérivons (1.5) par rapport au temps

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv_\tau}{dt}\boldsymbol{\tau} = v_\tau \frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt}. \tag{1.6}$$

Transformons ensuite le dernier terme de cette expression

$$v_\tau \frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} = v_\tau \frac{d\boldsymbol{\tau}}{dl}\frac{dl}{dt} = v_\tau^2 \frac{d\boldsymbol{\tau}}{dl} = v^2 \frac{d\boldsymbol{\tau}}{dl}. \tag{1.7}$$

Déterminons l'accroissement du vecteur $\boldsymbol{\tau}$ dans le secteur dl (fig. 4). On peut montrer strictement que lorsque le point *2* tend vers *1*, le segment de la trajectoire entre ces points tend vers l'arc de cercle de centre en un certain point O. Le point O s'appelle centre de courbure de la trajectoire en point donné, alors que le rayon ρ du cercle correspondant, rayon de courbure de la trajectoire en ce point.

La figure 4 rend clair que l'angle $\delta\alpha = |dl|/\rho = |d\boldsymbol{\tau}|/1$, d'où

$$|d\boldsymbol{\tau}/dl| = 1/\rho;$$

de plus, avec $dl \to 0$, $d\boldsymbol{\tau} \perp \boldsymbol{\tau}$. En introduisant le vecteur unité $\mathbf{n}$ de la normale à la trajectoire au point *1*, dirigé vers le centre de courbu-

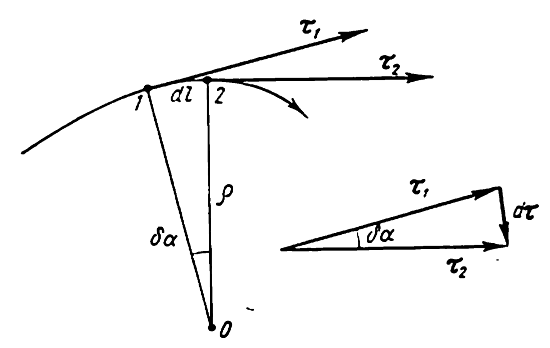


Fig. 4

re, écrivons la dernière égalité sous la forme vectorielle

$$d\boldsymbol{\tau}/dl = \mathbf{n}/\rho. \tag{1.8}$$

Portons maintenant (1.8) dans (1.7) et l'expression obtenue dans (1.6). Il en résultera

$$\boxed{\mathbf{w} = \frac{dv_\tau}{dt}\boldsymbol{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\mathbf{n}.} \tag{1.9}$$

Ici le premier terme s'appelle *accélération tangentielle* $\mathbf{w}_\tau$ et le deu-

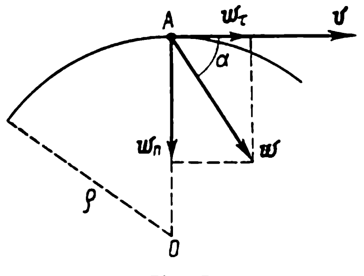


Fig. 5

xième, *accélération normale* (centripète) $\mathbf{w}_n$

$$\mathbf{w}_\tau = (dv_\tau/dt)\,\boldsymbol{\tau}; \quad \mathbf{w}_n = (v^2/\rho)\,\mathbf{n}. \tag{1.10}$$

De cette façon, l'accélération totale $\mathbf{w}$ d'un point peut être représentée comme la somme des accélérations tangentielle $\mathbf{w}_\tau$ et normale $\mathbf{w}_n$.

Le module de l'accélération totale d'un point s'écrit

$$w = \sqrt{w_\tau^2 + w_n^2} = \sqrt{(dv/dt)^2 + (v^2/\rho)^2}.$$

Exemple. Un point A se déplace suivant l'arc d'un cercle de rayon ρ (fig. 5). Sa vitesse est fonction du déplacement l d'après l'équation $v = a\sqrt{l}$, où a est une constante. Calculer l'angle α entre les vecteurs accélération totale et vitesse du point en tant que fonction de la coordonnée l.

La figure 5 montre que l'angle α peut être déterminé d'après la formule $\operatorname{tg}\alpha = w_n/w_\tau$. Calculons w_n et w_τ:

$$w_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{a^2 l}{\rho}; \quad w_\tau = \frac{dv_\tau}{dt} = \frac{dv_\tau}{dl}\frac{dl}{dt} = \frac{a}{2\sqrt{l}} a\sqrt{l} = \frac{a^2}{2}.$$

On en tire $\operatorname{tg}\alpha = 2l/\rho$.

§ 1.2. Cinématique du solide

La théorie du mouvement du solide, outre l'importance qu'elle présente par elle-même, joue encore un rôle important sous un autre rapport. On sait qu'on peut lier à un solide un système de référence qui servira pour la description spatio-temporelle de divers mouvements. L'étude de l'allure du mouvement des solides est donc au fond équivalente à celle du mouvement des systèmes de référence correspondants. Les résultats que nous obtiendrons dans ce paragraphe, seront utilisés dans ce qui suit à plus d'une reprise.

On distingue cinq formes de mouvement d'un solide: 1) translation ; 2) rotation autour d'un axe fixe ; 3) mouvement plan ; 4) mouvement autour d'un point fixe; 5) mouvement libre. Les deux premiers mouvements (translation et rotation autour d'un axe fixe) sont pour un solide les mouvements principaux ; comme nous allons le montrer sur l'exemple du mouvement plan, les autres formes du mouvement peuvent être ramenées à l'un des mouvements principaux ou à leurs combinaisons.

Le présent paragraphe traite des trois premières formes du mouvement et de la composition des vitesses angulaires.

Translation. C'est le mouvement d'un solide dans lequel toute droite qui lui est liée reste tout le temps parallèle à sa position initiale. Par exemple, un wagon qui se déplace dans un secteur de voie rectiligne, une cabine de la Grande roue, etc.

Dans une translation tous les points d'un solide effectuent des déplacements égaux en des intervalles de temps égaux. C'est pourquoi pour l'instant donné, les vitesses et les accélérations de tous les points d'un solide sont les mêmes. Cette circonstance permet de réduire l'étude de la translation d'un solide à celle du mouvement d'un point isolé, c'est-à-dire à la cinématique du point.

Ainsi, la translation d'un solide peut être décrite complètement si on connaît la relation entre le temps et le rayon vecteur $\mathbf{r}(t)$ d'un point de ce solide, et la position de ce dernier à l'instant initial.

Rotation autour d'un axe fixe. Supposons qu'un solide, en tournant autour d'un axe fixe OO' dans le système de référence donné, effectue en un temps dt une rotation infinitésimale. Caractérisons

l'angle de rotation correspondant par le vecteur $d\boldsymbol{\varphi}$, dont le module est égal à l'angle de rotation, alors que la direction coïncide avec l'axe OO' ; de plus, le sens de rotation correspond à la règle du tire-bouchon *droit* par rapport à la direction du vecteur $d\boldsymbol{\varphi}$ (fig. 6).

Cherchons maintenant pour une telle rotation le déplacement élémentaire d'un point A du solide. Donnons la position du point A par le rayon vecteur $\mathbf{r}$ mené à partir d'un point O sur l'axe de rotation. Le déplacement linéaire de l'extrémité du rayon vecteur $\mathbf{r}$ est alors lié à l'angle de rotation $d\varphi$ par la relation (fig. 6)

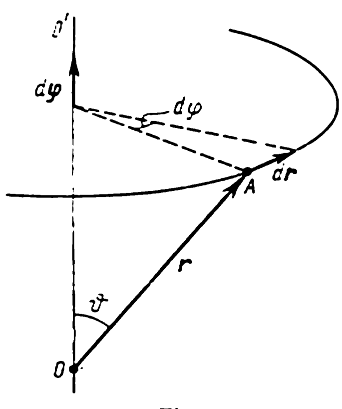


Fig. 6

$$|d\mathbf{r}| = r \sin \vartheta \, d\varphi,$$

ou sous une forme vectorielle

$$d\mathbf{r} = [d\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{r}]. \qquad (1.11)$$

Notons que cette égalité n'est vraie que pour une rotation infinitésimale $d\boldsymbol{\varphi}$. Autrement dit, il n'y a que les rotations infinitésimales qui peuvent être envisagées comme des vecteurs *.

D'autre part, on peut montrer que le vecteur $d\boldsymbol{\varphi}$ que nous avons introduit satisfait à la propriété principale des vecteurs, à celle de leur composition. En effet, imaginons qu'un solide effectue deux rotations élémentaires $d\boldsymbol{\varphi}_1$ et $d\boldsymbol{\varphi}_2$ autour des axes différents qui passent par le point fixe O. Le déplacement résultant $d\mathbf{r}$ d'un point arbitraire A du solide, dont le rayon vecteur par rapport à O est égal à $\mathbf{r}$, peut s'écrire aussi sous une autre forme

$$d\mathbf{r} = d\mathbf{r}_1 + d\mathbf{r}_2 = [d\boldsymbol{\varphi}_1, \mathbf{r}] + [d\boldsymbol{\varphi}_2, \mathbf{r}] = [d\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{r}],$$

où

$$d\boldsymbol{\varphi} = d\boldsymbol{\varphi}_1 + d\boldsymbol{\varphi}_2, \qquad (1.12)$$

c'est-à-dire les deux rotations données $d\boldsymbol{\varphi}_1$ et $d\boldsymbol{\varphi}_2$ sont équivalentes à une rotation d'angle $d\boldsymbol{\varphi} = d\boldsymbol{\varphi}_1 + d\boldsymbol{\varphi}_2$ autour de l'axe qui coïncide avec le vecteur $d\boldsymbol{\varphi}$ et qui passe par le point O.

Notons que lors de l'examen des grandeurs telles que le rayon vecteur $\mathbf{r}$, la vitesse $\mathbf{v}$, l'accélération $\mathbf{w}$, la question du choix de leur

---

* Pour une rotation finie d'angle $\Delta\varphi$ le déplacement linéaire du point A est, comme le montre la figure 6,

$$|\Delta\mathbf{r}| = r \sin \vartheta \cdot 2 \sin (\Delta\varphi/2).$$

Il devient tout de suite clair que le déplacement $\Delta\mathbf{r}$ ne peut être présenté comme produit vectoriel des vecteurs $\Delta\boldsymbol{\varphi}$ et $\mathbf{r}$. Ceci n'est possible que dans le cas d'une rotation $d\boldsymbol{\varphi}$ infinitésimale dans les limites de laquelle le rayon vecteur $\mathbf{r}$ peut être considéré comme invariable.

direction ne se posait pas, étant définie par la nature des grandeurs elles-mêmes. Les vecteurs de ce type sont dits *polaires*. A la différence de ces vecteurs, les vecteurs du type $d\boldsymbol{\varphi}$ dont la direction est liée au sens de rotation, sont dits *axiaux*.

Introduisons maintenant les vecteurs vitesse angulaire et accélération angulaire. Le vecteur vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$ est défini comme suit

$$\boldsymbol{\omega} = d\boldsymbol{\varphi}/dt, \tag{1.13}$$

où dt est l'intervalle de temps pendant lequel le solide effectue la rotation $d\boldsymbol{\varphi}$. Le vecteur $\boldsymbol{\omega}$ coïncide en direction avec le vecteur $d\boldsymbol{\varphi}$ et constitue un vecteur axial.

La variation du vecteur $\boldsymbol{\omega}$ dans le temps est caractérisée par le vecteur accélération angulaire $\boldsymbol{\beta}$ qui est défini comme suit:

$$\boldsymbol{\beta} = d\boldsymbol{\omega}/dt. \tag{1.14}$$

La direction du vecteur $\boldsymbol{\beta}$ coïncide avec celle de $d\boldsymbol{\omega}$ qui est l'accroissement du vecteur $\boldsymbol{\omega}$. Le vecteur $\boldsymbol{\beta}$ tout comme $\boldsymbol{\omega}$ est un vecteur axial.

La représentation de la vitesse et de l'accélération angulaires sous la forme de vecteurs s'avère très commode surtout pour l'étude des mouvements plus compliqués d'un solide. Dans de nombreux cas une telle représentation rend plus suggestive l'analyse du mouvement, tout en simplifiant cette dernière ainsi que les calculs correspondants.

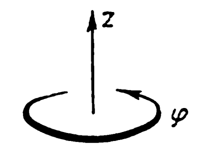


Fig. 7

Ecrivons les expressions des projections de la vitesse et de l'accélération angulaires sur l'axe de rotation des z, dont nous choisirons le sens positif dans la direction positive de la lecture de la coordonnée φ (angle de rotation) suivant la règle du tire-bouchon droit (fig. 7). Les projections ω_z et β_z des vecteurs $\boldsymbol{\omega}$ et $\boldsymbol{\beta}$ sur l'axe des z seront déterminées alors par les formules:

$$\omega_z = d\varphi/dt, \tag{1.15}$$

$$\beta_z = d\omega_z/dt. \tag{1.16}$$

Ici ω_z et β_z sont des grandeurs algébriques. Leur signe caractérise la direction du vecteur correspondant. Par exemple, si $\omega_z > 0$, la direction du vecteur $\boldsymbol{\omega}$ coïncide avec le sens positif de l'axe des z; mais si $\omega_z < 0$, la direction de $\boldsymbol{\omega}$ est inverse. Il en est de même pour l'accélération angulaire.

De la sorte, si on connaît la relation $\varphi(t)$ qui donne la loi de rotation du corps, les formules (1.15) et (1.16) permettent de trouver pour chaque instant la vitesse et l'accélération angulaires. Inversement: en connaissant la relation entre l'accélération angulaire

et le temps, ainsi que les conditions initiales, c'est-à-dire la vitesse angulaire ω_0 et l'angle φ_0, à l'instant initial, on peut trouver $\omega(t)$ et $\varphi(t)$.

Exemple. Un solide tourne autour d'un axe fixe suivant la formule: $\varphi = at - bt^2/2$, où a et b sont des constantes positives. Etablir le caractère du mouvement de ce corps.

D'après (1.15) et (1.16)

$$\omega_z = a - bt; \quad \beta_z = -b = \text{const}.$$

Il s'ensuit que le solide en tournant d'un mouvement uniformément retardé ($\beta_z < 0$) s'arrête à l'instant $t_0 = a/b$, après quoi le sens de rotation se renverse (signe de ω_z).

Notons que la résolution de tous les problèmes sur la rotation d'un solide autour d'un axe fixe est analogue quant à la forme à celle des problèmes sur la translation du point. Il suffit de remplacer les grandeurs linéaires x, v_x, w_x par les grandeurs angulaires correspondantes φ, ω_z, β_z pour obtenir toutes les lois et relations relatives au corps en rotation.

Relation entre les grandeurs linéaires et angulaires. Cherchons la vitesse $\mathbf{v}$ d'un point arbitraire A d'un solide en rotation autour d'un axe fixe OO' à la vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$. Supposons que la position du point A par rapport à un point O de l'axe de rotation est caractérisée par le rayon vecteur $\mathbf{r}$ (fig. 8). Utilisons la formule (1.11) en la divisant par l'intervalle de temps dt correspondant. Puisque $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}$ et $d\boldsymbol{\varphi}/dt = \boldsymbol{\omega}$, il vient

$$\boxed{\mathbf{v} = [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}],} \tag{1.17}$$

c'est-à-dire la vitesse $\mathbf{v}$ du point A d'un solide en rotation autour d'un axe à la vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$ est égale au produit vectoriel de $\boldsymbol{\omega}$ par le rayon vecteur $\mathbf{r}$ du point A par rapport à un point arbitraire O de l'axe de rotation (fig. 8).

Le module du vecteur (1.17) $v = \omega r \sin\vartheta$, ou

$$v = \omega\rho,$$

où ρ est le rayon du cercle que parcourt le point A.

En dérivant (1.17) par rapport au temps, calculons l'accélération $\mathbf{w}$ du point A

$$\mathbf{w} = [d\boldsymbol{\omega}/dt,\ \mathbf{r}] + [\boldsymbol{\omega},\ d\mathbf{r}/dt],$$

ou

$$\boxed{\mathbf{w} = [\boldsymbol{\beta}\mathbf{r}] + [\boldsymbol{\omega}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]].} \tag{1.18}$$

Dans le cas donné (axe de rotation fixe) $\boldsymbol{\beta} \parallel \boldsymbol{\omega}$; donc, le vecteur $[\boldsymbol{\beta}\mathbf{r}]$ représente l'accélération tangentielle $\mathbf{w}_\tau$. Quant au vecteur $[\boldsymbol{\omega}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]]$, c'est l'accélération normale $\mathbf{w}_n$. Les modules de ces accélé-

rations s'écrivent

$$|\mathbf{w}_\tau| = \beta\rho; \quad w_n = \omega^2\rho.$$

On en tire le module de l'accélération totale **w**

$$w = \sqrt{w_\tau^2 + w_n^2} = \rho\sqrt{\beta^2 + \omega^4}.$$

Mouvement plan d'un solide. C'est un mouvement dans lequel chaque point d'un solide se déplace dans un plan parallèle à un certain plan fixe (dans le référentiel considéré). Ceci étant, la figure Φ, formée au cours du mouvement par la section du solide par le plan fixe P (fig. 9), reste tout le temps dans ce plan; par exemple, un cylindre qui roule sans glissement sur un plan (mais le mouvement d'un cône est dans ce cas plus compliqué).

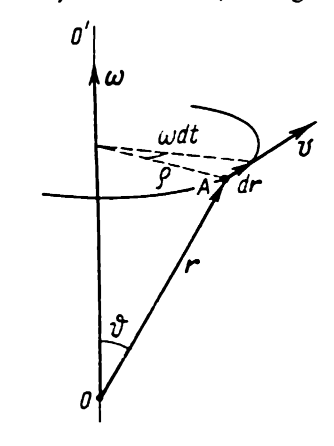


Fig. 8

On réalise aisément que dans le mouvement plan la position d'un solide est définie sans ambiguïté par la position de la figure Φ dans le plan fixe P. Ceci permet de ramener l'étude du mouvement à celle du mouvement d'une figure plane dans son plan.

Soit la figure Φ se déplaçant dans son plan P fixe dans le référentiel K (fig. 10). La position de la figure Φ dans le plan peut être définie par le rayon vecteur $\mathbf{r}_0$ d'un point arbitraire O' de la figure et l'angle φ entre le rayon vecteur $\mathbf{r}'$ lié invariablement à la figure et une certaine direction fixée dans le référentiel K. Le mouvement plan d'un solide sera alors décrit par deux équations

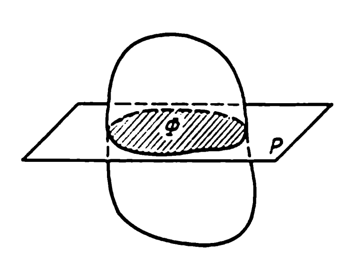


Fig 9

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0(t); \quad \varphi = \varphi(t).$$

Il est clair que si en un intervalle de temps dt le rayon vecteur $\mathbf{r}'$ du point A (fig. 10) tourne d'un angle $d\varphi$, tout segment lié à la figure tournera d'un même angle. Autrement dit, la rotation de la figure d'un angle $d\varphi$ ne dépend pas du choix du point O'. Or, cela signifie que la vitesse angulaire ω de la figure ne dépend pas non plus du choix du point O' et il est légitime d'appeler ω vitesse angulaire du solide tel quel.

Cherchons maintenant la vitesse $\mathbf{v}$ d'un point arbitraire A du solide animé d'un mouvement plan. Introduisons le référentiel auxiliaire K' lié invariablement au point O' du solide et qui se déplace d'un mouvement de translation par rapport au système K

(fig. 10). Le déplacement élémentaire $d\mathbf{r}$ du point A dans le système K peut se mettre sous la forme

$$d\mathbf{r} = d\mathbf{r}_0 + d\mathbf{r}',$$

où $d\mathbf{r}_0$ est le déplacement du système K' (point O'), et $d\mathbf{r}'$, le déplacement du point A par rapport au référentiel K'. Le déplacement $d\mathbf{r}'$ est conditionné par la rotation du solide autour d'un axe fixe dans le référentiel K' et passant par le point O'; d'après (1.11), $d\mathbf{r}' = [d\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{r}']$. En portant cette expression dans l'expression précé-

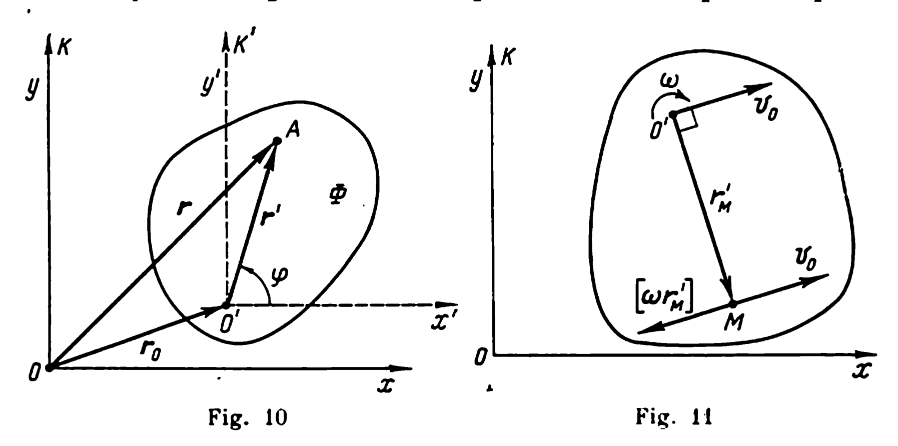


Fig. 10

Fig. 11

dente et en divisant les deux membres de l'égalité obtenue par dt, on trouve

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}'], \tag{1.19}$$

c'est-à-dire dans un mouvement plan * la vitesse d'un point quelconque A d'un solide se compose de la vitesse $\mathbf{v}_0$ d'un point arbitraire O' de ce solide et de la vitesse $\mathbf{v}' = [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}']$ conditionnée par la rotation du solide autour de l'axe qui passe par le point O'. Soulignons encore une fois que $\mathbf{v}'$ est la vitesse du point A par rapport au référentiel K' animé d'un mouvement de translation et lié rigidement au point O'.

Autrement dit, le mouvement plan d'un solide peut être présenté comme une combinaison de deux mouvements principaux, de la translation (avec le point arbitraire O' du corps) et de la rotation (autour de l'axe qui passe par le point O').

Montrons maintenant que le mouvement plan peut être ramené à un mouvement purement rotatif. En effet, dans le mouvement plan la vitesse $\mathbf{v}_0$ d'un point arbitraire O' d'un solide est perpendiculaire au vecteur $\boldsymbol{\omega}$; or, cela signifie qu'il y a toujours un point M lié

* Notons que la formule (1.19) est également vérifiée pour tout mouvement complexe du solide.

rigidement au solide * tel que sa vitesse à l'instant donné soit $\mathbf{v} = 0$. La condition $0 = \mathbf{v}_0 + [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}'_M]$ permet de trouver la position du point M, c'est-à-dire son rayon vecteur $\mathbf{r}'_M$ par rapport au point O' (fig. 11). Ce vecteur est perpendiculaire aux vecteurs $\boldsymbol{\omega}$ et $\mathbf{v}_0$, sa direction correspond au produit vectoriel $\mathbf{v}_0 = -[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}'_M]$, et son module $r'_M = v_0/\omega$.

Le point M détermine également la position de l'axe correspondant (il coïncide en direction avec le vecteur $\boldsymbol{\omega}$). Le mouvement d'un solide à l'instant donné constitue une rotation pure autour de cet axe. Un tel axe s'appelle *axe instantané de rotation*.

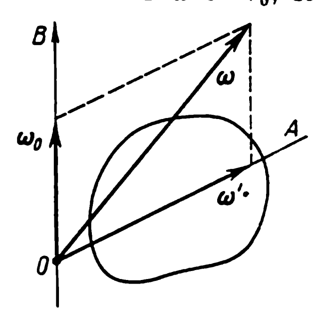


Fig. 12

En général, la position de cet axe change avec le temps. Par exemple, dans le cas d'un cylindre roulant sur un plan l'axe instantané coïncide à chaque instant avec la ligne de contact du cylindre et du plan.

Composition des vitesses angulaires. Examinons le mouvement d'un solide qui tourne simultanément autour de deux axes concourants. Entraînons un certain solide en rotation à une vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}'$ autour de l'axe OA (fig. 12), puis faisons tourner cet axe à une vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}_0$ autour de l'axe OB, fixe dans le référentiel K. Cherchons le mouvement résultant du solide dans ce référentiel.

Introduisons le référentiel auxiliaire K' lié invariablement aux axes OA et OB. Il est clair que ce référentiel tourne à une vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}_0$ et que le solide tourne par rapport à ce référentiel à une vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}'$.

En un intervalle de temps dt le solide effectuera une rotation $d\boldsymbol{\varphi}'$ autour de l'axe OA dans le référentiel K' et simultanément une rotation $d\boldsymbol{\varphi}_0$ avec le système K' autour de l'axe OB. D'après (1.12) la rotation totale est $d\boldsymbol{\varphi} = d\boldsymbol{\varphi}_0 + d\boldsymbol{\varphi}'$. En divisant les deux membres de cette égalité par dt, on obtient

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\omega}'. \tag{1.20}$$

De cette façon, le mouvement résultant d'un solide dans le référentiel K est une rotation pure à la vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$ autour de l'axe qui coïncide à chaque instant avec le vecteur $\boldsymbol{\omega}$ et qui passe par le point O (fig. 12). Cet axe se déplace par rapport au référentiel K en tournant à une vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}_0$ avec l'axe OA autour de l'axe OB.

Il est aisé de voir que même dans le cas des vitesses angulaires $\boldsymbol{\omega}'$ et $\boldsymbol{\omega}_0$ ne changeant pas en module, le solide aura dans le réfé-

* Il peut s'avérer que le point M se trouve hors du solide.

rentiel K une accélération angulaire $\boldsymbol{\beta}$ dirigée d'après (1.14) derrière le plan (fig. 12). L'accélération angulaire d'un solide est examinée plus en détail dans le problème 1.10.

Enfin, une dernière remarque. Etant donné que le vecteur vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$ vérifie la propriété principale dont jouissent les vecteurs, qui est la composition vectorielle, $\boldsymbol{\omega}$ peut être mise sous la forme d'une somme vectorielle des composantes sur des directions définies, c'est-à-dire $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 + \ldots$, où tous les vecteurs se rapportent au même référentiel. Cette astuce commode et utile est souvent employée pour analyser un mouvement compliqué d'un solide.

§ 1.3. Transformations de la vitesse et de l'accélération lors du passage à un autre référentiel

En abordant l'étude de cette question, rappelons que dans le cadre de la mécanique classique la longueur des échelles et le temps sont considérés comme grandeurs absolues. Toute échelle est la même dans des systèmes de référence différents, c'est-à-dire ne dépend pas du mouvement. Ceci concerne également l'écoulement du temps qui est aussi le même dans tous les systèmes.

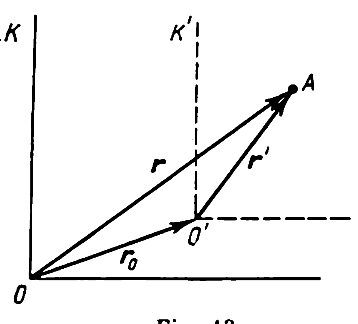


Fig. 13

Position du problème. On donne deux référentiels arbitraires K et K' qui se déplacent d'une façon définie l'un par rapport à l'autre. On connaît la vitesse $\mathbf{v}$ et l'accélération $\mathbf{w}$ d'un point A dans le référentiel K. Quelles sont les valeurs correspondantes $\mathbf{v}'$ et $\mathbf{w}'$ de ce point dans le référentiel K' ?

Examinons successivement trois cas les plus importants du mouvement d'un référentiel par rapport à un autre.

1. **Le référentiel K' est animé d'un mouvement de translation par rapport à K.** Supposons que dans K l'origine de K' est définie par le rayon vecteur $\mathbf{r}_0$, et ses vitesse et accélération, par les vecteurs $\mathbf{v}_0$ et $\mathbf{w}_0$. Si la position du point A dans K est définie par le rayon vecteur $\mathbf{r}$, et dans K', par le rayon vecteur $\mathbf{r}'$, il est clair que $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}'$ (fig. 13). Supposons ensuite, que dans le référentiel K le point A effectue pendant l'intervalle de temps dt un déplacement élémentaire $d\mathbf{r}$. Ce déplacement se compose du déplacement $d\mathbf{r}_0$ avec le référentiel K' et du déplacement $d\mathbf{r}'$ par rapport au référentiel K', c'est-à-dire $d\mathbf{r} = d\mathbf{r}_0 + d\mathbf{r}'$. En divisant l'expression donnée par dt on obtient la formule suivante de la transformation de la vitesse

$$\boxed{\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}'.} \tag{1.21}$$

En dérivant (1.21) par rapport au temps, on trouve tout de suite également la formule de la transformation de l'accélération

$$\boxed{\mathbf{w} = \mathbf{w}_0 + \mathbf{w}'.} \tag{1.22}$$

Il s'ensuit, notamment, que pour $\mathbf{w}_0 = 0$, $\mathbf{w} = \mathbf{w}'$, c'est-à-dire dans le mouvement du référentiel K' sans accélération par rapport au référentiel K, les accélérations du point A seront les mêmes dans les deux référentiels.

2. Le référentiel K' est animé d'une rotation à une vitesse angulaire constante ω autour d'un axe fixe dans le référentiel K. Prenons

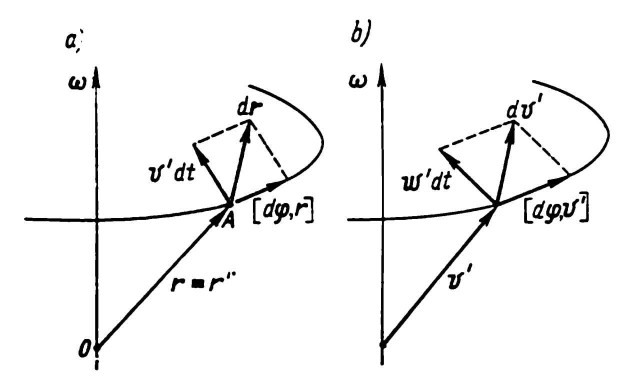


Fig. 14

pour origine de K et K' un point arbitraire O sur l'axe de rotation (fig. 14, *a*). Alors, dans les deux référentiels, le rayon vecteur du point A sera le même $\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}'$.

Si le point A est fixe dans K', cela signifie que pendant le temps dt son déplacement $d\mathbf{r}$ dans K n'est conditionné que par la rotation du rayon vecteur $\mathbf{r}$ d'un angle $d\boldsymbol{\varphi}$ (avec K') et est égal d'après (1.11) au produit vectoriel $[d\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{r}]$.

Mais si le point A se déplace par rapport à K' à la vitesse $\mathbf{v}'$, pendant le temps dt il effectuera un déplacement supplémentaire $\mathbf{v}'dt$ (fig. 14, *a*), et alors

$$d\mathbf{r} = \mathbf{v}'dt + [d\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{r}]. \tag{1.23}$$

En divisant cette expression par dt on obtient la formule suivante de la transformation de la vitesse

$$\boxed{\mathbf{v} = \mathbf{v}' + [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}],} \tag{1.24}$$

où $\mathbf{v}$ et $\mathbf{v}'$ sont les vitesses du point A dans les référentiels K et K' respectivement.

Passons maintenant aux accélérations. D'après (1.24) dans K l'accroissement $d\mathbf{v}$ du vecteur $\mathbf{v}$ pendant le temps dt doit se com-

poser de la somme des accroissements des vecteurs $\mathbf{v}'$ et $[\omega\mathbf{r}]$, c'est-à-dire

$$d\mathbf{v} = d\mathbf{v}' + [\omega, d\mathbf{r}]. \tag{1.25}$$

Calculons $d\mathbf{v}'$. Si le point A se déplace dans le référentiel K' à $\mathbf{v}' = \text{const}$, l'accroissement de ce vecteur dans K n'est défini que par sa rotation d'angle $d\varphi$ (avec le référentiel K') et est égal, comme dans le cas de $\mathbf{r}$, au produit vectoriel $[d\varphi, \mathbf{v}']$. Il n'est pas difficile de s'en convaincre en faisant coïncider l'origine du vecteur $\mathbf{v}'$ avec l'axe de rotation (fig. 14, *b*). Mais si le point A possède une accélération $\mathbf{w}'$ dans le système K', pendant le temps dt le vecteur $\mathbf{v}'$ recevra encore une accélération supplémentaire $\mathbf{w}'dt$ et alors

$$a\mathbf{v}' = \mathbf{w}'dt + [d\varphi, \mathbf{v}']. \tag{1.26}$$

Maintenant portons (1.26) et (1.23) dans l'égalité (1.25) et divisons l'expression obtenue par dt. Il en résultera la formule suivante de la transformation de l'accélération

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}' + 2\,[\omega\mathbf{v}'] + [\omega\,[\omega\mathbf{r}]], \tag{1.27}$$

où $\mathbf{w}$ et $\mathbf{w}'$ sont les accélérations du point A dans les référentiels K et K'. Le deuxième terme du deuxième membre de cette formule s'appelle accélération de *Coriolis* (ou de rotation) $\mathbf{w}_{\text{Cor}}$, et le troisième, accélération d'*entraînement* * $\mathbf{w}_{\text{en}}$

$$\mathbf{w}_{\text{Cor}} = 2\,[\omega\mathbf{v}']; \quad \omega_{\text{en}} = [\omega\,[\omega\mathbf{r}]]. \tag{1.28}$$

De la sorte, l'accélération $\mathbf{w}$ d'un point par rapport au référentiel K est égale à la somme des trois accélérations: accélération $\mathbf{w}'$ par rapport à K', accélération d'entraînement $\mathbf{w}_{\text{en}}$ et accélération de Coriolis $\mathbf{w}_{\text{Cor}}$.

L'accélération d'entraînement peut être mise sous la forme $\mathbf{w}_{\text{en}} = -\omega^2\boldsymbol{\rho}$, où $\boldsymbol{\rho}$ est le rayon vecteur perpendiculaire à l'axe de rotation et caractéristique de la position du point A par rapport à cet axe. La formule (1.27) peut alors s'écrire

$$\boxed{\mathbf{w} = \mathbf{w}' + 2\,[\omega\mathbf{v}'] - \omega^2\boldsymbol{\rho}.} \tag{1.29}$$

3. Le référentiel K' est animé d'une rotation à une vitesse angulaire constante ω autour d'un axe en translation à la vitesse $\mathbf{v}_0$ avec une accélération $\mathbf{w}_0$ par rapport au référentiel K.

Ce cas réunit les deux précédents. Introduisons le référentiel auxiliaire S invariablement lié à l'axe de rotation du référentiel K' et animé d'un mouvement de translation dans le système K. Soient $\mathbf{v}$ et $\mathbf{v}_S$ les vitesses du point A dans K et S; alors, conformément à (1.21), $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_S$. En remplaçant d'après (1.24) $\mathbf{v}_S$ par l'expression $\mathbf{v}_S = \mathbf{v}' + [\omega\mathbf{r}]$, où $\mathbf{r}$ est le rayon vecteur du point A par

* Il ne faut pas confondre l'accélération d'entraînement avec l'accélération normale (centrifuge).

rapport à un point arbitraire sur l'axe de rotation de K', on obtient la formule suivante de la transformation de la vitesse:

$$\boxed{\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_0 + [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}].} \tag{1.30}$$

D'une façon analogue, en utilisant (1.22) et (1.29) on trouve la formule de transformation de l'accélération *:

$$\boxed{\mathbf{w} = \mathbf{w}' + \mathbf{w}_0 + 2\,[\boldsymbol{\omega}\mathbf{v}'] - \omega^2\boldsymbol{\rho}.} \tag{1.31}$$

Rappelons que dans les deux dernières formules $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}'$ et $\mathbf{w}$, $\mathbf{w}'$ sont les vitesses et les accélérations du point A respectivement dans K et K' ; $\mathbf{v}_0$ et $\mathbf{w}_0$, la vitesse et l'accélération de l'axe de rotation de K' dans K ; $\mathbf{r}$, le rayon vecteur du point A par rapport au point arbitraire sur l'axe de rotation de K' ; $\boldsymbol{\rho}$, le rayon vecteur perpendiculaire à l'axe de rotation caractéristique de la position du point A par rapport à cet axe.

Examinons à titre de conclusion l'exemple suivant.

Exemple. Un disque tourne à une vitesse angulaire constante $\boldsymbol{\omega}$ autour d'un axe fixé à la table. Le point A se déplace sur le disque à une vitesse constante $\mathbf{v}$ par rapport à la table. Trouver la vitesse $\mathbf{v}'$ et l'accélération $\mathbf{w}'$ du point A par rapport au disque à l'instant où le rayon vecteur caractéristique de sa position par rapport à l'axe de rotation est égal à $\boldsymbol{\rho}$.

D'après (1.24). la vitesse $\mathbf{v}'$ du point A s'écrit

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - [\boldsymbol{\omega\rho}].$$

Quant à l'accélération $\mathbf{w}'$, nous la trouverons à l'aide de (1.29) et tenant compte que dans le cas considéré $\mathbf{w} = 0$, puisque $\mathbf{v} = \text{const}$. Il vient $\mathbf{w}' = -2[\boldsymbol{\omega}\mathbf{v}'] + \omega^2\boldsymbol{\rho}$. En portant dans cette formule l'expression de $\mathbf{v}'$, on obtient

$$\mathbf{w}' = 2[\mathbf{v}\boldsymbol{\omega}] - \omega^2\boldsymbol{\rho}.$$

Problèmes du premier chapitre

● **1.1.** Le rayon vecteur caractéristique de la position d'une particule A par rapport au point fixe O change dans le temps d'après la formule

$$\mathbf{r} = \mathbf{a}\sin\omega t + \mathbf{b}\cos\omega t,$$

où $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ sont des vecteurs constants; de plus. $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$; ω, une constante positive. Trouver l'accélération $\mathbf{w}$ de la particule et l'équation de sa trajectoire $y(x)$ en admettant que les axes x et y coïncident en direction respectivement avec les vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ issus du point O.

Solution. En dérivant $\mathbf{r}$ deux fois par rapport au temps on obtient

$$\mathbf{w} = -\omega^2(\mathbf{a}\sin\omega t + \mathbf{b}\cos\omega t) = -\omega^2\mathbf{r},$$

c'est-à-dire le vecteur $\mathbf{w}$ est orienté constamment vers le point O, et son module est proportionnel à la distance de la particule jusqu'à ce point.

Cherchons maintenant l'équation de la trajectoire. En projetant $\mathbf{r}$ sur les axes x et y on obtient

$$x = a\sin\omega t; \qquad y = b\cos\omega t.$$

---

* Notons que dans le cas le plus général, lorsque $\boldsymbol{\omega} \neq \text{const}$, le deuxième membre de la formule (1.31) contiendra encore un terme, $[\boldsymbol{\beta}\mathbf{r}]$, où $\boldsymbol{\beta}$ est l'accélération angulaire du référentiel K' ; $\mathbf{r}$, le rayon vecteur caractéristique de la position, sur l'axe de rotation, du point qui a été pris pour origine dans le référentiel K'.

En éliminant ωt de ces deux équations, on trouve

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1.$$

C'est l'équation d'une ellipse dont a et b sont les demi-axes (fig. 15; la flèche indique la direction du mouvement de la particule A).

● **1.2. Déplacement et chemin.** A l'instant $t = 0$ on a communiqué à une particule la vitesse $\mathbf{v}_0$, après quoi sa vitesse changeait dans le temps d'après la formule

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 (1 - t/\tau),$$

où τ est une constante positive. Chercher pour les premières t secondes du mouvement

1) le vecteur déplacement $\Delta\mathbf{r}$ de la particule;

2) le chemin s qu'elle a parcouru.

Solution. 1. D'après (1.1), $d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt = \mathbf{v}_0 (1 - t/\tau)\, dt$. En intégrant cette équation sur le temps de 0 à t, on obtient

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{v}_0 t (1 - t/2\tau).$$

2. Le chemin s parcouru par la particule en un temps t est défini comme

$$s = \int_0^t v\, dt,$$

où v est le *module* du vecteur $\mathbf{v}$. Dans ce cas

$$v = v_0 \mid 1 - t/\tau \mid = \begin{cases} v_0 (1 - t/\tau), & \text{si } t \leqslant \tau, \\ v_0 (t/\tau - 1), & \text{si } t \geqslant \tau. \end{cases}$$

Il s'ensuit que pour $t > \tau$ l'intégrale de calcul du chemin parcouru doit être divisée en deux parties: de 0 à τ et de τ à t. En intégrant dans les deux cas

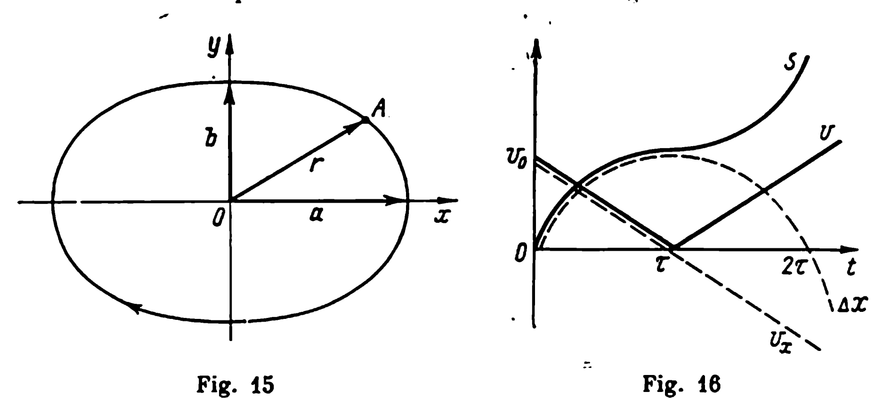


Fig. 15 Fig. 16

($t < \tau$ et $t > \tau$), on obtient

$$s = \begin{cases} v_0 t (1 - t/2\tau), & \text{si } t \leqslant \tau, \\ v_0 \tau [1 + (1 - t/\tau)^2]/2, & \text{si } t \geqslant \tau. \end{cases}$$

La figure 16 visualise les relations $v(t)$ et $s(t)$. Cette même figure donne en pointillé les diagrammes des relations entre t et les projections v_x et Δx des vecteurs $\mathbf{v}$ et $\Delta\mathbf{r}$ sur l'axe x orienté le long du vecteur $\mathbf{v}_0$.

● **1.3.** Un tramway se déplace en translation de la station A à la station B avec une accélération qui varie d'après la formule $w = a - bx$, où a et b sont des constantes positives; x, la distance entre le tramway et la station A. Calculer la distance entre ces stations et la vitesse maximale du tramway.

Solution. Cherchons d'abord la relation entre la vitesse et x. Pendant l'intervalle de temps dt l'accroissement de la vitesse $dv = w dt$. Réduisons cette expression à la forme commode pour l'intégration en profitant du fait que $dt = dx/v$; il vient

$$v\,dv = (a - bx)\,dx.$$

En intégrant cette expression (le premier membre de 0 à v et le deuxième, de 0 à x), on trouve

$$v^2/2 = ax - bx^2/2 \quad \text{ou} \quad v = \sqrt{(2a - bx)\,x}.$$

On voit tout de suite que la distance entre les stations, c'est-à-dire la valeur de x_0 pour laquelle $v = 0$, est $x_0 = 2a/b$. Quant à la vitesse maximale, nous la déterminerons à partir de la condition $dv/dx = 0$, ou plus simplement, de la condition du maximum du radicande. On en tire la valeur de x_m qui correspond à v_{max}: $x_m = a/b$ et $v_{max} = a/\sqrt{b}$.

● **1.4.** Une particule se déplace dans le plan x, y à partir du point $x = y = 0$ à la vitesse $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + bx\mathbf{j}$, où a et b sont des constantes; $\mathbf{i}$ et $\mathbf{j}$, les vecteurs unités des axes des x et des y. Chercher l'équation de sa trajectoire $y(x)$.

Solution. Ecrivons les accroissements des coordonnées y et x de la particule pendant un intervalle de temps dt: $dy = v_y\,dt$; $dx = v_x dt$, où $v_y = bx$; $v_x = a$. En prenant leur rapport on obtient

$$dy = (b/a)\,x dx.$$

L'intégration de cette expression amène

$$y = \int_0^x (b/a)\,x\,dx = (b/2a)\,x^2,$$

c'est-à-dire la trajectoire du point est une parabole.

● **1.5.** L'équation du mouvement du point A de la jante d'une roue qui roule uniformément sur une voie horizontale (axe des x) est de la forme

$$x = a\,(\omega t - \sin \omega t); \qquad y = a\,(1 - \cos \omega t),$$

où a et ω sont des constantes positives. Calculer la vitesse v du point A, le chemin s parcouru par ce point entre deux contacts successifs avec la voie, ainsi que le module et la direction de l'accélération $\mathbf{w}$ du point A.

Solution. La vitesse v du point A et le chemin s qu'il a parcouru sont déterminés par les formules

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = a\omega \sqrt{2\,(1 - \cos \omega t)} = 2a\omega \sin(\omega t/2);$$

$$s = \int_0^{t_1} v\,(t)\,dt = 4a\,[1 - \cos(\omega t_1/2)],$$

où t_1 est l'intervalle de temps entre deux contacts successifs. On tire de l'équation $y\,(t)$ que pour $\omega t_1 = 2\pi$, $y\,(t_1) = 0$. Donc $s = 8a$.

L'accélération du point A

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = a\omega^2.$$

Montrons que le vecteur $\mathbf{w}$ constant en module est toujours orienté vers le point C, centre de la roue. En effet, dans le référentiel K' lié au point C et animé d'un mouvement de translation uniforme par rapport à la voie, le point A se déplace uniformément suivant un cercle autour du point C. Dans le référentiel K' son accélération est donc dirigée vers le centre de la roue. Or, K' se déplace uniformément et le vecteur $\mathbf{w}$ sera aussi dirigé vers le centre de la roue par rapport à la voie.

● **1.6.** Un point est animé d'un mouvement retardé suivant le cercle de rayon r de façon qu'à tout instant les accélérations tangentielle et normale soient

égales en module. A l'instant initial on a communiqué au point une vitesse v_0. Calculer la vitesse v et le module de l'accélération totale w du point en fonction du chemin parcouru s.

Solution. Par condition, $dv/dt = -v^2/r$. En écrivant dt comme ds/v, ramenons l'équation initiale à la forme

$$dv/v = -ds/r.$$

L'intégration de cette expression compte tenu de la vitesse initiale amène le résultat suivant:

$$v = v_0 e^{-s/r}.$$

Dans le cas considéré $|w_\tau| = w_n$; donc, l'accélération totale $w = \sqrt{2} w_n = \sqrt{2}\, v^2/r$ ou

$$w = \sqrt{2}\, v_0^2/re^{2s/r}.$$

● 1.7. Lors du déplacement d'un point sur une trajectoire plane son accélération tangentielle $w_\tau = a$, et son accélération normale, $w_n = bt^4$, où a et b sont des constantes positives; t, le temps. Le point démarre à l'instant $t = 0$. Calculer le rayon de courbure ρ de la trajectoire du point et son accélération totale en fonction du chemin parcouru s.

Solution. L'accroissement élémentaire de la vitesse du point $dv = w_\tau dt$. En intégrant cette équation, on obtient $v = at$. Le chemin parcouru $s = at^2/2$.

D'après (1.10) le rayon de courbure d'une trajectoire peut être mis sous la forme $\rho = v^2/w_n = a^2/bt^2$, ou

$$\rho = a^3/2bs.$$

L'accélération totale

$$w = \sqrt{w_\tau^2 + w_n^2} = a\sqrt{1 + (4bs^2/a^3)^2}.$$

● 1.8. Une particule se déplace uniformément à la vitesse v suivant une trajectoire parabolique $y = ax^2$, où a est une constante positive. Calculer l'accélération w de la particule en $x = 0$.

Solution. Dérivons deux fois l'équation de la trajectoire par rapport au temps

$$\frac{dy}{dt} = 2ax\frac{dx}{dt}; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = 2a\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + x\frac{d^2x}{dt^2}\right].$$

La particule se déplaçant uniformément, son accélération en tous les points de la trajectoire est purement normale et en $x = 0$ elle coïncide avec la dérivée d^2y/dt^2 en ce point. Compte tenu du fait que lorsque x est nul, $|dx/dt| = v$, on obtient

$$w = (d^2y/dt^2)_{x=0} = 2av^2.$$

Notons que dans le mode de résolution indiqué, nous avons évité le calcul du rayon de courbure de la trajectoire en $x = 0$ qu'il faut connaître dans les cas courants pour définir l'accélération normale ($w_n = v^2/\rho$).

● 1.9. **Rotation d'un solide.** Un solide est entraîné en rotation autour d'un axe fixe avec une accélération angulaire $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}_0 \cos\varphi$, où $\boldsymbol{\beta}_0$ est un vecteur constant; φ, l'angle de rotation du solide à partir de la position initiale. Calculer la vitesse angulaire ω_z du solide en fonction de l'angle φ.

Solution. Choisissons la direction positive de l'axe des z le long du vecteur $\boldsymbol{\beta}_0$. D'après (1.16), $d\omega_z = \beta_z dt$. En écrivant d'après la formule (1.15) dt comme $d\varphi/\omega_z$, ramenons l'équation précédente à la forme

$$\omega_z d\omega_z = \beta_0 \cos\varphi\, d\varphi.$$

L'intégration de cette expression compte tenu de la condition initiale ($\omega_z = 0$ avec $\varphi = 0$) donne $\omega_z^2/2 = \beta_0 \sin\varphi$. D'où

$$\omega_z = \pm\sqrt{2\beta_0 \sin\varphi}.$$

Le diagramme de la relation ω_n (φ) est représenté sur la figure 17. Il montre qu'avec la croissance de l'angle φ le vecteur $\boldsymbol{\omega}$ croît d'abord, coïncidant en direction avec le vecteur $\boldsymbol{\beta}_0$ ($\omega_z > 0$), atteint le maximum avec $\varphi = \pi/2$, puis commence à diminuer pour s'annuler avec $\varphi = \pi$. Après quoi le corps reprend cette rotation mais dans une direction opposée ($\omega_z < 0$). Il en résulte que le corps oscille autour de la position $\varphi = \pi/2$, l'amplitude des oscillations étant égale à $\pi/2$.

● 1.10. Un cône à base circulaire de rayon r d'une hauteur h roule sans glisser à la surface de la table suivant la figure 18. Le sommet du cône est arti-

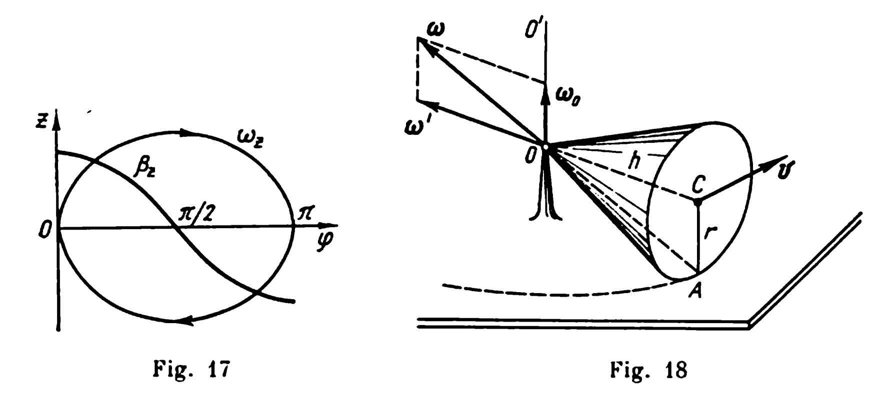


Fig. 17 Fig. 18

culé en O au niveau du point C, centre de la base du cône. Le point C se déplace à vitesse constante v. Calculer

1) la vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$ et

2) l'accélération angulaire $\boldsymbol{\beta}$ du cône par rapport à la table.

Solution. 1. D'après (1.20) $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\omega}'$, où $\boldsymbol{\omega}_0$ et $\boldsymbol{\omega}'$ sont les vitesses angulaires de la rotation autour des axes OO' et OC respectivement. Les modules des vecteurs $\boldsymbol{\omega}_0$ et $\boldsymbol{\omega}'$ s'obtiennent sans peine à partir de la figure 18:

$$\omega_0 = v/h; \qquad \omega' = v/r.$$

Leur rapport est $\omega_0/\omega' = r/h$. Il s'ensuit que le vecteur $\boldsymbol{\omega}$ coïncide à tout instant avec la génératrice du cône qui passe par le point de contact A.

Le module du vecteur $\boldsymbol{\omega}$ s'écrit

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 + \omega'^2} = (v/r)\sqrt{1 + (r/h)^2}.$$

2. D'après (1.14) l'accélération angulaire $\boldsymbol{\beta}$ du cône est la dérivée du vecteur $\boldsymbol{\omega}$ par rapport au temps. Etant donné que $\boldsymbol{\omega}_0 = \text{const}$, il vient

$$\boldsymbol{\beta} = d\boldsymbol{\omega}/dt = d\boldsymbol{\omega}'/dt.$$

Le vecteur $\boldsymbol{\omega}'$ en restant constant en module, tourne autour de l'axe OO' à une vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}_0$. Son accroissement pendant l'intervalle de temps dt est égal en module à $|d\boldsymbol{\omega}'| = \omega' \cdot \omega_0 dt$, ou, sous une forme vectorielle, $d\boldsymbol{\omega}' = [\boldsymbol{\omega}_0 \boldsymbol{\omega}']\, dt$. De la sorte

$$\boldsymbol{\beta} = [\boldsymbol{\omega}_0 \boldsymbol{\omega}'].$$

Le module de ce vecteur $\beta = v^2/rh$.

● **1.11. Transformations de la vitesse et de l'accélération.** Une tige horizontale tourne à une vitesse angulaire constante $\boldsymbol{\omega}$ autour d'un axe vertical fixé à la table et passant par une des extrémités de la tige. Sur la tige se déplace un petit manchon dont la vitesse par rapport à la tige varie suivant la formule

$\mathbf{v}' = a\mathbf{r}$, où a est une constante; $\mathbf{r}$, le rayon vecteur caractéristique de la distance entre le manchon et l'axe de rotation. Calculer

1) la vitesse $\mathbf{v}$ et l'accélération $\mathbf{w}$ du manchon par rapport à la table en fonction de $\mathbf{r}$;

2) l'angle entre les vecteurs $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$ au cours du mouvement.

Solution. 1. D'après (1.24)

$$\mathbf{v} = a\mathbf{r} + [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}].$$

Le module de ce vecteur $v = r\sqrt{a^2 + \omega^2}$.

L'accélération $\mathbf{w}$ se cacule d'après la formule (1.29) où dans notre cas $\mathbf{w}' = d\mathbf{v}'/dt = a^2\mathbf{r}$. Il vient

$$\mathbf{w} = (a^2 - \omega^2)\,\mathbf{r} + 2a\,[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}].$$

Le module de ce vecteur $w = (a^2 + \omega^2)\,r$.

2. Pour calculer l'angle α entre les vecteurs $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$ utilisons leur produit scalaire, dont il suit que $\cos\alpha = \mathbf{vw}/vw$. Après des transformations correspondantes on obtient

$$\cos\alpha = 1/\sqrt{1 + (\omega/a)^2}.$$

Il est clair que dans le mouvement pour le cas considéré l'angle α reste constant.

CHAPITRE 2

ÉQUATION FONDAMENTALE DE LA DYNAMIQUE

§ 2.1. Systèmes de référence galiléens

Principe de l'inertie. En cinématique où il s'agit seulement de la description des mouvements et où la question des causes qui les provoquent ne se pose pas, il n'y a aucune différence de principe entre les différents systèmes de référence (référentiels) et sous ce rapport ils sont tous équivalents. Il en va tout autrement en dynamique lorsqu'on étudie les lois du mouvement. Cette branche de la mécanique révèle la différence essentielle qui existe entre les différents systèmes de référence et les avantages que présente une classe des référentiels devant les autres.

En principe on peut adopter l'un des systèmes de référence innombrables. Pourtant, dans de différents systèmes de référence les lois de la mécanique ont en général, une forme différente et il peut s'avérer que dans un référentiel arbitraire les lois décrivant les phénomènes les plus simples deviennent très compliquées. Le problème se pose donc naturellement de trouver un référentiel qui simplifierait au possible les lois de la mécanique. Un tel référentiel sera, de toute évidence, le plus commode pour décrire les phénomènes mécaniques.

Pour résoudre ce problème examinons l'accélération d'un point matériel par rapport à un référentiel arbitraire. D'où vient cette accélération? L'expérience montre qu'elle peut être provoquée aussi bien par l'action sur le point des corps définis, que par les propriétés du référentiel lui-même (en effet, dans le cas général, l'accélération sera différente par rapport à des référentiels différents).

Pourtant, on peut *supposer* qu'il existe un système de référence tel que l'accélération d'un point matériel y soit uniquement définie par son interaction avec les autres corps. Par rapport à un tel système le déplacement d'un point matériel libre de toute action de la part d'autres corps, sera rectiligne et uniforme, il se déplacera, comme on dit, par inertie. Un tel système de référence est dit *galiléen*.

Le fait que des systèmes galiléens existent constitue le contenu de *la première loi de la mécanique classique, du principe d'inertie de Galilée-Newton*.

Leur existence est confirmée par les expériences. Les premières de ces expériences ont permis d'établir que la Terre est un système de référence de cette sorte. Des mesures plus précises (celles de Foucault et analogues) ont montré que la Terre n'est pas un référentiel parfaitement galiléen *: on a découvert des accélérations qui ne peuvent être dues à l'action des corps définis. D'autre part, les observations des accélérations des planètes ont montré que le système de référence héliocentrique lié au centre du Soleil et aux étoiles « fixes » est galiléen. De nos jours le caractère galiléen du référentiel héliocentrique est confirmé par l'ensemble de toutes les recherches.

Un référentiel quelconque qui se déplace d'un mouvement uniforme et rectiligne par rapport au système héliocentrique est également un système galiléen. En effet, si dans le référentiel héliocentrique l'accélération d'un corps est nulle, elle l'est également dans n'importe quel autre de ces référentiels.

Ainsi, il existe non pas un seul mais un nombre infini de systèmes de référence galiléens qui se déplacent l'un par rapport à l'autre d'un mouvement rectiligne et uniforme. Les référentiels qui se déplacent avec une accélération par rapport aux systèmes galiléens sont dits *non galiléens*.

Propriétés de symétrie du temps et de l'espace. Les systèmes de référence galiléens présentent cette particularité importante que par rapport à ces systèmes le temps et l'espace possèdent des *propriétés de symétrie* définies. Plus précisément : l'expérience nous convainc que dans ces systèmes le temps est *homogène* et l'espace, *homogène* et *isotrope*.

L'*homogénéité du temps* consiste dans le fait que la marche des phénomènes physiques à des instants différents de leur observation (dans les mêmes conditions) est la même. Autrement dit, les différents instants sont équivalents entre eux quant à leurs propriétés physiques.

L'*homogénéité et l'isotropie de l'espace* consistent dans le fait qu'en points différents les propriétés de l'espace sont les mêmes (homogénéité), et en chaque point elles sont les mêmes dans toutes les directions (isotropie).

Notons que par rapport aux systèmes de référence non galiléens l'espace est hétérogène et non isotrope. Cela signifie que si un corps n'interagit avec aucun autre corps, dans le sens mécanique ses différentes positions dans l'espace et ses différentes orientations ne sont pas équivalentes. Dans le cas général ceci se rapporte également au temps qui dans ces conditions sera hétérogène (dans des référentiels non galiléens), c'est-à-dire ses instants différents ne seront pas équivalents. Il est clair que ces propriétés de l'espace et du temps compliqueraient sensiblement la description des phénomènes mécaniques. Ainsi, un corps ne subissant pas l'action exercée par d'autres corps, ne pourrait pas être au repos: si à un certain instant sa vitesse est nulle, à l'instant suivant déjà il commencerait à se déplacer dans une direction définie.

Principe de relativité de Galilée. Les référentiels galiléens vérifient le principe de relativité d'après lequel tous les systèmes de ce type sont équivalents entre eux quant aux propriétés mécaniques. Cela signifie qu'aucune expérience mécanique montée « à l'inté-

* Notons que dans de nombreux cas le système de référence lié à la Terre peut pratiquement être considéré comme galiléen.

rieur » d'un système galiléen ne permettra d'établir si le système en question est au repos ou s'il est animé d'un mouvement. Dans tous les référentiels galiléens les propriétés de l'espace et du temps sont les mêmes, tout aussi bien que les lois de la mécanique.

Cette affirmation traduit le contenu du *principe de relativité de Galilée*, l'un des principes fondamentaux de la mécanique classique. Il constitue une généralisation de l'expérience confirmée par toute la multiplicité des applications de la mécanique classique au mouvement des corps, dont les vitesses sont sensiblement inférieures à celle de la lumière.

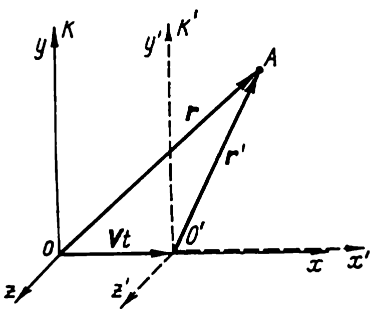


Fig. 19

Ce qui vient d'être dit rend suffisamment clair le caractère exceptionnel des propriétés des référentiels galiléens qui imposent dans l'étude des phénomènes mécaniques le recours précisément à ces systèmes.

Transformations de Galilée. Cherchons les formules de transformation des coordonnées pour le passage d'un système de référence galiléen à un autre. Soit le système K' se déplaçant à la vitesse $\mathbf{V}$ par rapport à un autre système K. Choisissons les axes des coordonnées du système K' : x', y', z', parallèles aux axes correspondants x, y, z du système K, de façon que les axes x et x' se confondent et soient orientés le long du vecteur $\mathbf{V}$ (fig. 19). En adoptant pour origine du temps l'instant où les origines des coordonnées O' et O coïncident, écrivons la relation entre les rayons vecteurs $\mathbf{r}'$ et $\mathbf{r}$ du même point A dans K' et K:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{V}t, \tag{2.1}$$

par ailleurs

$$t' = t. \tag{2.2}$$

On sous-entend ici que la longueur des segments et la marche du temps ne dépendent pas de l'état du mouvement, et par conséquent, sont les mêmes dans les deux référentiels. L'hypothèse de l'espace et du temps absolus est à la base même des notions de la mécanique classique, notions fondées sur une documentation expérimentale riche fournie par l'étude du mouvement à des vitesses sensiblement inférieures à celle de la lumière.

Les relations (2.1) et (2.2) constituent ce qu'on appelle les *transformations de Galilée*. Mises en coordonnées, ces transformations sont de la forme:

$$\boxed{x' = x - Vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t.} \tag{2.3}$$

En dérivant (2.1) par rapport au temps on trouve la formule classique de la transformation de la vitesse d'un point lors du passage d'un référentiel galiléen à un autre

$$\boxed{\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{V}.} \qquad (2.4)$$

En dérivant cette expression par rapport au temps et en tenant compte que $\mathbf{V}$ = const, on obtient $\mathbf{w}' = \mathbf{w}$, c'est-à-dire l'accélération d'un point est la même dans tous les référentiels galiléens.

§ 2.2. Lois fondamentales de la dynamique newtonienne

En étudiant expérimentalement divers mouvements nous découvrons que dans les référentiels galiléens *toute* accélération d'un corps est due à l'action exercée sur ce dernier par d'autres corps. Dans ces conditions l'intensité de l'influence (de l'action) exercée par chacun des corps environnants sur l'état du mouvement du corps considéré A ne peut être déterminée dans chaque cas concret que par l'expérience.

L'influence (l'action) d'un autre (ou des autres) corps qui provoque l'accélération de A s'appelle *force*. Ainsi, l'accélération d'un corps est due à la force dont il subit l'action.

L'une des caractéristiques les plus importantes d'une force est son origine matérielle. En parlant de force nous supposons toujours implicitement qu'en l'absence de corps étrangers, la force appliquée au corps considéré est nulle. Mais si nous découvrons qu'un corps subit l'action d'une force, nous cherchons sa *source* sous la forme de tel ou tel corps concret.

Toutes les forces qui intéressent la mécanique sont classées généralement en forces dues au contact immédiat des corps (pression, frottement) et forces transmises par les *champs* créés par des corps en interaction (gravitation, électromagnétisme). Notons, pourtant, que cette classification est très conventionnelle: même dans le cas du contact immédiat les forces d'interaction sont conditionnées aussi par la présence de tels ou tels champs créés par les atomes ou les molécules des corps. Ainsi, en dernier compte, toutes les forces d'interaction entre les corps sont dues aux champs. La nature des forces d'interaction est une question qui dépasse le cadre de la mécanique et fait l'objet d'autres branches de la physique.

Masse. L'expérience montre que tout corps « résiste » aux tentatives quelles qu'elles soient de modifier sa vitesse aussi bien en module qu'en direction. Cette propriété qui exprime le degré de résistance d'un corps à la modification de sa vitesse s'appelle *inertie*. Des corps différents ont des inerties différentes. L'inertie est mesurée par la grandeur qui s'appelle *masse*. Un corps de masse plus grande est plus inerte, et inversement.

Introduisons la notion de masse *m en déterminant* le rapport des masses de deux corps par le rapport inverse des accélérations que leur communiquent des forces *égales*

$$m_1/m_2 = w_2/w_1. \tag{2.5}$$

Notons que cette définition n'impose pas la mesure préalable des forces elles-mêmes. Il suffit seulement de connaître le critère de leur *égalité*. Par exemple, si deux corps différents reposant sur un plan lisse horizontal subissent successivement l'action du même ressort orienté horizontalement et étendu à la même longueur, nous pouvons affirmer que dans les deux cas le ressort agira sur chaque corps de la même façon; autrement dit, dans les deux cas la force est la même.

De la sorte, comparer les masses de deux corps sur lesquels agit la même force signifie comparer les accélérations de ces corps. En prenant un certain corps comme étalon de masse, on rend possible la comparaison de la masse des corps avec cet étalon.

Comme le montre l'expérience, dans le cadre de la mécanique newtonienne la masse ainsi définie possède deux propriétés capitales suivantes:

1) c'est une grandeur *additive*, c'est-à-dire la masse d'un corps composé est égale à la somme des masses de ses parties;

2) c'est une grandeur *constante* qui ne change pas lors du mouvement du corps.

Force. Reprenons l'expérience qui comparait les accélérations de deux corps sous l'action d'un ressort étendu à la même longueur. Le fait que dans les deux cas le ressort était étendu à la même longueur a permis d'énoncer l'affirmation sur l'identité de l'action du ressort ou de la force fournie par le ressort.

D'autre part, la force est la cause de l'accélération d'un corps. Or, les accélérations dues à l'action du même ressort étendu à la même longueur sont différentes pour des corps différents. Notre tâche est de définir la force *de façon que* malgré la différence des accélérations des corps différents dans l'expérience considérée, la force soit la même.

A cet effet il faut élucider en premier lieu ce qui est *identique* dans les expériences considérées? La réponse est évidente: c'est le produit mw. Il est donc naturel de définir la force par cette grandeur. D'autre part, en tenant compte que l'accélération est un vecteur, considérons que la force est aussi un vecteur qui coïncide en direction avec le vecteur accélération $\mathbf{w}$.

Résumons: dans la mécanique newtonienne la *force* appliquée au corps de masse *m est définie* comme le produit $m\mathbf{w}$. En plus des considérations de plus grande simplicité et de commodité, cette définition de la force a été justifiée par la vérification ultérieure de toutes ses conséquences.

Deuxième loi de Newton. En étudiant expérimentalement l'interaction de divers points matériels avec les corps environnants, nous découvrons que $m\mathbf{w}$ dépend des grandeurs caractéristiques aussi bien de l'état du point matériel lui-même, que de l'état des corps environnants.

Ceci est un fait physique très important qui est à la base de la *deuxième loi de Newton*, une des généralisations les plus fondamentales de la mécanique newtonienne:

le produit de la masse d'un point matériel par son accélération est fonction de la position de ce point par rapport aux corps environnants, et parfois également fonction de sa vitesse. Cette fonction appelée *force* est notée **F**.

Ceci constitue précisément le contenu réel de la deuxième loi de Newton dont l'énoncé sommaire se présente dans les cas courants de la façon suivante:

le produit de la masse d'un point matériel par son accélération est égal à la force dont il subit l'action, c'est-à-dire

$$\boxed{m\mathbf{w} = \mathbf{F}.} \tag{2.6}$$

Cette équation s'appelle *équation du mouvement d'un point matériel.*

Soulignons tout de suite que la deuxième loi de Newton et l'équation (2.6) acquièrent un contenu concret seulement après l'établissement de la forme de la fonction **F**, sa dépendance des grandeurs qui la déterminent, ou, comme il est d'usage de le dire, *la loi de la force.* L'établissement de la loi de la force est dans chaque cas concret l'une des tâches principales de la mécanique physique.

La définition de la force comme $m\mathbf{w}$ qui est à la base de l'équation (2.6) a ce mérite exceptionnel qu'elle rend très simples les lois des forces. Il est vrai que l'étude des mouvements aux vitesses relativistes a montré que les lois des forces devraient être modifiées et leur dépendance par rapport à la vitesse du point matériel deviendrait très compliquée. La théorie serait alors lourde et embrouillée.

Il existe pourtant une façon bien simple de tourner cette difficulté en donnant une définition quelque peu différente de la force: *la force est la dérivée de l'impulsion* **p** *d'un point matériel par rapport au temps*, c'est-à-dire $d\mathbf{p}/dt$, et en écrivant l'équation (2.6) sous la forme: $d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}$.

Dans la mécanique newtonienne cette définition de la force est identique à $m\mathbf{w}$, puisque $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$; $m = \text{const}$ et $d\mathbf{p}/dt = m\mathbf{w}$. Quant à la mécanique relativiste, comme nous allons le voir, la relation entre l'impulsion et la vitesse du point matériel est plus compliquée. Mais ce qui importe, c'est tout autre chose. Pour une telle définition de la force ($d\mathbf{p}/dt$), il s'avère que dans le domaine relativiste les lois des forces restent les mêmes. Aussi, en passant à la mécanique relativiste n'aura-t-on pas besoin de modifier l'expression simple de la force donnée, établie à l'aide de l'environnement physique. Dans ce qui suit nous tiendrons compte de cette circonstance.

Composition des forces. Dans des conditions concrètes données tout point matériel subit en toute rigueur *une seule* force **F** dont

le module et la direction sont déterminés par la position de ce point par rapport à tous les corps environnants, et parfois également par sa vitesse. Néanmoins, il est souvent commode de représenter cette force **F** comme le résultat global de l'action des corps isolés ou des forces $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, . . . L'expérience montre que si les corps qui sont des sources de forces n'influent pas l'un sur l'autre et, de ce fait, ne changent pas leur état par suite de la présence d'autres corps, la force

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \ldots ,$$

où $\mathbf{F}_i$ est la force qui s'exercerait sur le point matériel considéré de la part de l'i-ième corps *en l'absence* d'autres corps.

S'il en est ainsi, on dit que les forces $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, . . . vérifient le *principe de superposition*. Cette affirmation doit être envisagée comme la généralisation des faits d'expérience.

Troisième loi de Newton. Dans tous les cas lorsque l'expérience porte seulement sur deux corps A et B, le corps A communiquant au corps B une accélération, on découvre que le corps B communique également une accélération au corps A. On en tire que les actions des corps ont le caractère d'*interaction*.

Newton a énoncé le postulat suivant sur la propriété générale de toutes les forces d'interaction, qui porte le nom de *troisième loi de Newton*:

les forces avec lesquelles deux points matériels agissent l'un sur l'autre sont toujours égales en module et dirigées dans des sens opposés le long d'une droite qui relie ces points, c'est-à-dire

$$\boxed{\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}.} \tag{2.7}$$

Cela signifie que les forces d'interaction se manifestent toujours par *paires*. Les deux forces sont appliquées aux points matériels *différents* et sont en plus de *même* nature.

La loi (2.7) concerne des systèmes d'un nombre arbitraire de points matériels. Nous nous inspirons de l'idée que dans ce cas-là aussi l'interaction se ramène aux forces d'interaction deux à deux entre les points matériels.

La troisième loi de Newton suppose que les deux forces sont égales en module en un *instant quelconque indépendamment du mouvement* des points. Cette affirmation correspond à l'idée newtonienne de la propagation instantanée des interactions, hypothèse qui s'appelle *principe de l'action à distance* de la mécanique classique. D'après ce principe, dans l'espace, l'interaction entre les corps se propage à une vitesse infiniment grande. Autrement dit, si on change la position (l'état) d'un corps, on peut tout de suite découvrir ne serait-ce qu'une très faible variation dans les corps qui interagissent avec lui, quel que soit leur éloignement.

Nous savons aujourd'hui qu'en fait il n'en est pas ainsi, les interactions se propagent à une vitesse *finie* maximale qui est celle de la lumière dans le vide. La troisième loi de Newton, aussi bien que la deuxième, a donc des limites d'application définies. Toutefois, pour les vitesses des corps sensiblement inférieures à celle de la lumière, qui intéressent la mécanique classique, les deux lois sont respectées avec une grande précision. Le témoignage en est fourni ne serait-ce que par les calculs des trajectoires des planètes et des satellites artificiels, dont la précision « astronomique » est assurée justement par les lois de Newton.

Les lois de Newton sont les lois fondamentales de la mécanique classique. Elles rendent possible, au moins en principe, la résolution de n'importe quel de ses problèmes; elles permettent aussi de déduire toutes ses autres lois.

Conformément au principe de relativité de Galilée, les lois de la mécanique sont les mêmes dans tous les référentiels galiléens. Cela signifie, en particulier, que l'équation (2.6) aura la même forme quel que soit le référentiel galiléen. En effet, la masse m d'un point matériel comme tel ne dépend pas de la vitesse, c'est-à-dire est la même dans tous les systèmes de référence. D'autre part, pour les référentiels galiléens l'accélération $\mathbf{w}$ d'un point est également la même. La force $\mathbf{F}$ ne dépend pas non plus du référentiel, puisqu'elle est déterminée seulement par la position relative et la vitesse du point matériel par rapport aux autres corps qui l'entourent; or, d'après la cinématique non relativiste, ces grandeurs sont les mêmes dans des référentiels galiléens différents.

De la sorte, lors du passage d'un référentiel galiléen à un autre, toutes les trois grandeurs m, $\mathbf{w}$ et $\mathbf{F}$ qui interviennent dans l'équation (2.6) ne changent pas, et donc l'équation (2.6) ne change pas non plus. En d'autres termes, l'équation $m\mathbf{w} = \mathbf{F}$ est *invariante* par rapport aux transformations de Galilée.

§ 2.3. Forces

Pour ramener la recherche de la loi du mouvement d'une particule à un problème purement mathématique, il faut connaître avant tout, conformément à l'équation (2.6), les lois ou équations des forces qui agissent sur la particule, c'est-à-dire la dépendance des forces par rapport aux grandeurs qui les déterminent. Toute équation de ce type s'obtient finalement à partir du traitement des résultats de l'expérience et repose toujours au fond sur l'équation (2.6) comme définition de la force.

Les forces fondamentales qui sont à la base de tous les phénomènes mécaniques sont les forces d'attraction et électriques. Enonçons les lois de ces forces sous leur forme la plus simple, lorsque les masses

interagissantes (charges) sont au repos ou se déplacent à de petites vitesses (non relativistes).

Force d'attraction s'exerçant entre deux points matériels. Conformément à la *loi de l'attraction universelle* cette force est proportionnelle au produit des masses des points m_1 et m_2, et inversement proportionnelle au carré de la distance r entre eux ; elle est orientée suivant la droite qui relie ces points :

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}, \tag{2.8}$$

où γ est la constante de la gravitation.

Les masses qui figurent dans cette loi sont dites *gravitationnelles* à la différence de la masse *inerte* qui intervient dans la deuxième loi de Newton. Pourtant, l'expérience montre que les masses inerte et gravitationnelle d'un corps sont rigoureusement proportionnelles entre elles. On peut donc les considérer comme égales (c'est-à-dire choisir un étalon pour la mesure des deux masses) et parler simplement de la masse en tant que mesure d'inertie d'un corps ou de l'action gravitationnelle.

La **force de Coulomb** agit entre deux charges ponctuelles q_1 et q_2

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2}, \tag{2.9}$$

où r est la distance entre les charges ; k, le coefficient de proportionnalité qui dépend du choix du système d'unités. A la différence de la force d'attraction, la force de Coulomb peut être aussi bien force d'attraction que force de répulsion.

Notons que si les charges se déplacent la loi de Coulomb (2.9) cesse d'être observée rigoureusement. Il s'avère que l'interaction électrique des charges en mouvement dépend d'une façon compliquée de leur mouvement. Une des parties de cette interaction conditionnée par le mouvement s'appelle force *magnétique* (on en tire une autre dénomination de cette interaction : électromagnétisme). A de petites vitesses (non relativistes) la force magnétique ne fait qu'une partie négligeable de l'interaction électrique ; elle est décrite avec une grande précision par la formule (2.9).

Bien que les interactions gravitationnelles et électriques sont à la base de toute la multiplicité des phénomènes mécaniques, si dans tous les cas nous nous inspirions des interactions fondamentales, il serait très compliqué d'analyser ces phénomènes, surtout dans le domaine macroscopique. On introduit donc par commodité d'autres expressions approximatives pour les lois des forces qui en principe peuvent se déduire de celles des forces fondamentales. Ceci est nécessaire pour simplifier le problème mathématique de façon à le rendre pratiquement résoluble.

A cet effet on introduit, par exemple, les expressions des forces suivantes.

Force de pesanteur homogène

$$\mathbf{F} = m\mathbf{g}, \tag{2.10}$$

où m est la masse du corps; g, l'accélération de la pesanteur *.

Force élastique. C'est une force proportionnelle au déplacement du point matériel à partir de la position d'équilibre et dirigée vers cette dernière

$$\mathbf{F} = -\varkappa \mathbf{r}, \tag{2.11}$$

où r est le rayon vecteur caractéristique du déplacement de la particule à partir de la position d'équilibre; $\varkappa$, le coefficient positif dépendant des propriétés « élastiques » de telle ou telle force concrète. L'exemple d'une telle force peut être fourni par la déformation élastique dans la traction (compression) d'un ressort ou d'une tige; d'après la *loi de Hooke*, cette force est déterminée comme $F = \varkappa \Delta l$, où Δl est la valeur de la déformation élastique.

Force de frottement de glissement. Cette force apparaît lorsqu'un corps glisse à la surface d'un autre corps

$$F = kR_n, \tag{2.12}$$

où k est le coefficient de frottement de glissement qui dépend de la nature et de l'état des surfaces en contact (en particulier, de la rugosité); R_n, la force de la pression normale qui serre les surfaces de frottement l'une à l'autre. La force F est orientée dans la direction opposée à celle du mouvement du corps considéré par rapport à l'autre corps.

Résistance. Elle agit sur le corps lors de sa translation dans un gaz ou un liquide. Cette force dépend de la vitesse du corps v par rapport au milieu, sa direction étant opposée à celle du vecteur v:

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{v}, \tag{2.13}$$

où k est le coefficient positif caractéristique du corps et du milieu donnés. Ce coefficient dépend en général de la vitesse v; pourtant, à de faibles vitesses, on peut admettre dans de nombreux cas qu'il est constant.

---

* Notons qu'à la différence de la force de pesanteur, le *poids* **P** est la force avec laquelle le corps agit sur l'appui ou la suspension, *immobiles* par rapport au corps considéré. Par exemple, si le corps avec l'appui (la suspension) sont immobiles par rapport à la Terre, alors le poids **P** coïncide avec la force de pesanteur. Dans le cas contraire, le poids $\mathbf{P} = m(\mathbf{g} - \mathbf{w})$, où **w** est l'accélération du corps (avec l'appui) par rapport à la Terre.

§ 2.4. Equation fondamentale de la dynamique

L'équation fondamentale de la dynamique d'un point matériel n'est rien d'autre que l'expression mathématique de la deuxième loi de Newton:

$$\boxed{m\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\mathbf{F}.} \tag{2.14}$$

L'équation (2.14) est au fond une équation différentielle du mouvement d'un point sous une forme vectorielle. Sa résolution constitue la tâche principale de la dynamique du point matériel. Il existe deux positions opposées du problème:

1. Trouver la force **F** qui agit sur le point si on connaît la masse m du point et la relation entre son rayon vecteur **r** (t) et le temps.

2. Trouver la loi du mouvement d'un point, c'est-à-dire la relation entre son rayon vecteur **r** (t) et le temps, si on connaît la masse m du point, la force **F** (ou les forces $\mathbf{F}_i$) qui lui est appliquée et les conditions initiales: vitesse $\mathbf{v}_0$ et position $\mathbf{r}_0$ du point à l'instant initial.

Dans le premier cas le problème se ramène à la dérivation de **r** (t) par rapport au temps; dans le deuxième, à l'intégration de l'équation (2.14). L'aspect mathématique de ce problème a été examiné avec des détails suffisants lors de l'étude de la cinématique du point.

Suivant le caractère et la position d'un problème concret, l'équation (2.14) est résolue soit sous une forme vectorielle, soit à l'aide des coordonnées, soit encore à l'aide des projections sur la tangente et la normale à la trajectoire en point donné. Etablissons l'écriture de l'équation (2.14) dans les deux derniers cas.

Projections sur les axes des coordonnées cartésiennes. En projetant les deux membres de l'équation (2.14) sur les axes des x, des y et des z, on obtient trois équations différentielles de la forme

$$\boxed{m\frac{dv_x}{dt}=F_x,\quad m\frac{dv_y}{dt}=F_y,\quad m\frac{dv_z}{dt}=F_z,} \tag{2.15}$$

où F_x, F_y, F_z sont les projections du vecteur **F** sur les axes des x, des y et des z. Il convient de retenir que ces projections sont des grandeurs algébriques; elles peuvent être aussi bien positives que négatives en fonction de l'orientation du vecteur **F**. Le signe de la projection de la résultante **F** détermine également le signe de la projection du vecteur accélération.

Examinons sur un exemple concret en quoi consiste l'*approche standard* de la résolution du problème à l'aide de l'équation (2.15).

Exemple. Une petite barre de masse m glisse sur une pente qui fait avec l'horizon un angle α. Le coefficient de frottement est égal à k. Trouver l'accélé-

ration de la barre par rapport au plan de la pente (on admet que ce référentiel est galiléen).

Il convient de représenter d'abord toutes les forces appliquées à la barre. Ce sont la force de pesanteur mg, la force normale de la réaction R de la part du plan et la force de frottement $\mathbf{F}_{fr}$ (fig. 20) orientée dans le sens opposé au mouvement de la barre.

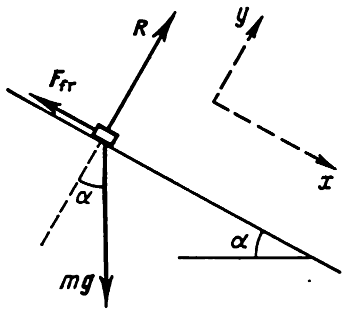


Fig. 20

Associons ensuite au référentiel « pente » le système de coordonnées x, y, z. En général, un système de coordonnées peut être orienté arbitrairement, mais dans de nombreux cas (et, en particulier, dans le nôtre), le choix de la direction des axes est dicté par le caractère du mouvement. Dans notre cas, par exemple, on connaît à l'avance la direction du mouvement de la barre; il est donc plus avantageux de disposer les axes des coordonnées de façon que l'un d'eux coïncide avec la direction du mouvement. Le problème se ramènera alors à la résolution d'une seule équation (2.15). Ainsi, choisissons l'axe des x suivant la figure 20 en indiquant obligatoirement sa direction positive (par une flèche).

Ce n'est qu'ensuite que nous pouvons nous attaquer à la composition des équations (2.15) en portant dans le premier membre le produit de la masse m de la barre par la projection de son accélération w_x, et dans le deuxième, les projections de toutes les forces sur l'axe des x

$$mw_x = mg_x + R_x + F_{fr\,x}.$$

Dans notre cas: $g_x = g \sin \alpha$; $R_x = 0$ et $F_{fr\,x} = -F_{fr}$; donc

$$mw_x = mg \sin \alpha - F_{fr}.$$

Puisque la barre se déplace seulement suivant l'axe des x, d'après la deuxième loi de Newton la somme des projections de toutes les forces sur une direction quelconque perpendiculaire à l'axe des x est nulle. En retenant en guise de cette direction l'axe des y (fig. 20), on obtient

$$R = mg \cos \alpha \quad \text{et} \quad F_{fr} = kR = kmg \cos \alpha.$$

Il en résulte

$$mw_x = mg \sin \alpha - kmg \cos \alpha.$$

Si le deuxième membre de cette équation s'avère positif, alors, $w_x > 0$ et le vecteur $\mathbf{w}$ est dirigé sur la pente en bas, et inversement.

Projections sur la tangente et la normale à la trajectoire en point donné. En projetant les deux membres de (2.14) sur des vecteurs unités mobiles $\boldsymbol{\tau}$ et $\mathbf{n}$ (fig. 21) et en utilisant les expressions (1.10) obtenues auparavant pour les accélérations tangentielle et normale, écrivons

$$\boxed{m\frac{dv_\tau}{dt} = F_\tau, \quad m\frac{v^2}{\rho} = F_n,} \qquad (2.16)$$

où F_τ et F_n sont les projections du vecteur $\mathbf{F}$ sur les vecteurs unités $\boldsymbol{\tau}$ et $\mathbf{n}$. Sur la figure 21 les deux projections sont positives. Les vec-

teurs $\mathbf{F}_\tau$ et $\mathbf{F}_n$ sont appelés composantes tangentielle et normale de la force **F**.

Rappelons que la direction du vecteur unité $\boldsymbol{\tau}$ est choisie dans le sens de l'accroissement du déplacement l, et la direction du vecteur unité **n**, dans celui du centre de courbure de la trajectoire en point donné.

Si on connaît à l'avance la trajectoire du point matériel, il est commode d'utiliser les équations (2.16).

Exemple. Un petit corps A glisse du sommet d'une sphère lisse de rayon r. Trouver la vitesse du corps à l'instant où il se détache de la surface de la sphère, si sa vitesse initiale est à négliger.

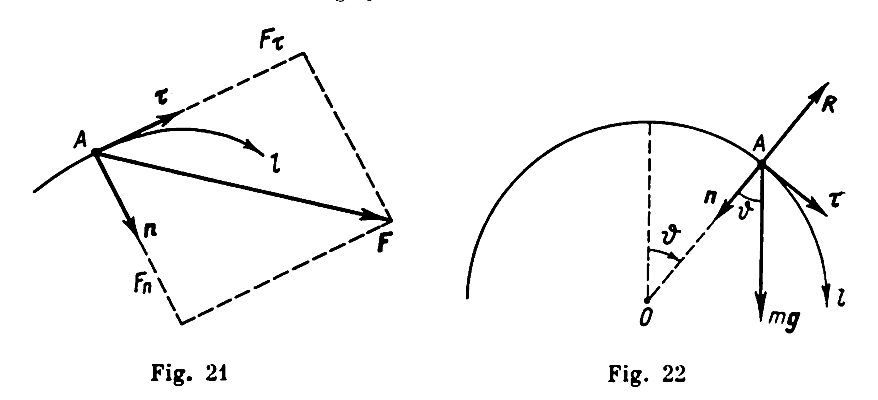


Fig. 21 Fig. 22

Traçons les forces appliquées au corps A (c'est la force de pesanteur mg et la force normale de la réaction **R**) et écrivons les équations (2.16) en projections sur les vecteurs unités $\boldsymbol{\tau}$ et **n** (fig. 22):

$$m\,dv/dt = mg \sin \vartheta;$$

$$mv^2/r = mg \cos \vartheta - R;$$

ici l'indice τ ne joue aucun rôle et nous l'omettons.

Réduisons la première équation à une forme commode pour l'intégration. Profitons du fait que $dt = dl/v = r\,d\vartheta/v$, où dl est le chemin élémentaire du corps A en un intervalle de temps dt, pour récrire la première équation sous la forme

$$v\,dv = gr \sin \vartheta d\vartheta.$$

En intégrant le premier membre de cette expression de 0 à v, et le deuxième membre de 0 à ϑ, on obtient

$$v^2 = 2gr\,(1 - \cos \vartheta).$$

Ensuite, à l'instant où le corps se détache, $R = 0$; donc, la deuxième équation initiale devient

$$v^2 = gr \cos \vartheta,$$

où v et ϑ correspondent à l'instant du détachement. En éliminant $\cos \vartheta$ des deux dernières égalités, on obtient $v = \sqrt{2gr/3}$.

§ 2.5. Référentiels non galiléens. Forces d'inertie

Equation fondamentale de la dynamique dans un référentiel non galiléen. Nous avons noté précédemment que l'équation fondamentale de la dynamique n'est vraie que dans des systèmes de référence galiléens. Or, il existe de nombreux cas lorsqu'il faut résoudre le problème qui nous intéresse dans des référentiels *non galiléens* (par exemple, le mouvement d'un pendule mathématique dans un wagon animé d'un mouvement accéléré, le mouvement d'un satellite par rapport à la surface de la Terre, etc.). C'est pourquoi la question se pose à savoir: comment faut-il modifier l'équation fondamentale de la dynamique pour la rendre valide également dans le cas des référentiels non galiléens?

Dans ce but prenons deux référentiels, *galiléen* K et *non galiléen* K'. Supposons qu'on connaît la masse m de la particule, la force $\mathbf{F}$ qui agit sur cette dernière de la part des corps environnants, et l'allure du mouvement de K' par rapport à K.

Examinons le cas assez général du référentiel K' entraîné en rotation à une vitesse angulaire constante $\boldsymbol{\omega}$ autour de l'axe en translation avec une accélération $\mathbf{w}_0$ par rapport au référentiel K. Utilisons la formule de la transformation des accélérations (1.31). On en tire que l'accélération d'une particule dans K'

$$\mathbf{w}' = \mathbf{w} - \mathbf{w}_0 + \omega^2\boldsymbol{\rho} + 2\,[\mathbf{v}'\boldsymbol{\omega}], \qquad (2.17)$$

où $\mathbf{v}'$ est la vitesse de la particule par rapport à K'; $\boldsymbol{\rho}$, le rayon vecteur perpendiculaire à l'axe de rotation et caractéristique de la position de la particule par rapport à cet axe.

En multipliant les deux membres de (2.17) par la masse m de la particule et en retenant que dans un référentiel galiléen $m\mathbf{w} = \mathbf{F}$, on obtient

$$\boxed{m\mathbf{w}' = \mathbf{F} - m\mathbf{w}_0 + m\omega^2\boldsymbol{\rho} + 2m\,[\mathbf{v}'\boldsymbol{\omega}].} \qquad (2.18)$$

Ceci est justement l'*équation fondamentale de la dynamique dans un référentiel non galiléen*, animé d'une rotation à une vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$ autour d'un axe en translation avec une accélération $\mathbf{w}_0$. Elle montre clairement que même avec $\mathbf{F} = 0$, dans le cas général, la particule se déplacera dans ce système avec une accélération différente de zéro, et ceci de façon comme si le corps subissait l'action de certaines forces qui correspondent aux trois derniers termes de l'équation (2.18). Ces forces ont reçu le nom de *forces d'inertie*.

L'équation (2.18) montre que l'introduction des forces d'inertie permet de conserver également, quant à la forme, l'équation fondamentale de la dynamique pour des systèmes non galiléens: son premier membre représente le produit de la masse d'une particule par son accélération (mais cette fois par rapport au référentiel non galiléen), et le deuxième membre, les forces. Pourtant, outre la

force **F** due à l'action des corps environnants, il faut tenir compte encore des forces d'inertie que sont les autres termes du second membre de (2.18).

Forces d'inertie. Récrivons l'équation (2.18) sous la forme

$$m\mathbf{w}' = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{in} + \mathbf{F}_{cf} + \mathbf{F}_{Cor}, \qquad (2.19)$$

où

$$\boxed{\mathbf{F}_{in} = -m\mathbf{w}_0} \qquad (2.20)$$

est la *force d'inertie en translation* conditionnée par le mouvement de translation d'un référentiel non galiléen;

$$\boxed{\mathbf{F}_{cf} = m\omega^2\boldsymbol{\rho}} \qquad (2.21)$$

est la *force d'inertie centrifuge*;

$$\boxed{\mathbf{F}_{Cor} = 2m\,[\mathbf{v}'\boldsymbol{\omega}]} \qquad (2.22)$$

est la *force de Coriolis*. Les deux dernières forces sont conditionnées par le mouvement de rotation du référentiel.

Ainsi, nous voyons que les forces d'inertie dépendent des propriétés du référentiel non galiléen ($\mathbf{w}_0$, $\boldsymbol{\omega}$), ainsi que de la distance $\boldsymbol{\rho}$ et de la vitesse $\mathbf{v}'$ de la particule dans ce référentiel.

Si, par exemple, un référentiel non galiléen se déplace en translation (par rapport à un référentiel galiléen), dans ce système une particule libre subit seulement l'action de la force (2.20) dirigée dans le sens opposé à celui de l'accélération $\mathbf{w}_0$ du référentiel donné. Souvenons-nous comment lors du freinage brusque d'un wagon la force d'inertie nous projette en avant, c'est-à-dire dans le sens opposé à celui de $\mathbf{w}_0$.

Voici un autre cas: le corps A repose dans un référentiel qui se déplace à une vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$ autour d'un axe immobile, par exemple, un homme se tient sur la roue horizontale d'une attraction. En plus de la force d'interaction avec les corps environnants le corps A subit la force d'inertie centrifuge (2.21) dirigée à partir de l'axe de rotation suivant le rayon vecteur $\boldsymbol{\rho}$. Tant que le corps A est au repos par rapport à la roue ($\mathbf{v}' = 0$), cette force compense la force d'interaction. Mais dès que le corps se met en mouvement, c'est-à-dire dès qu'apparaît la vitesse $\mathbf{v}'$, la force de Coriolis (2.22) dont la direction est définie par le produit vectoriel $[\mathbf{v}'\boldsymbol{\omega}]$ entre également en action. Notons que la force de Coriolis s'ajoute à la force centrifuge qui agit aussi bien quand le corps est au repos que quand il se déplace dans un référentiel en rotation.

Nous avons déjà dit dans ce qui précède que pratiquement le référentiel lié à la surface terrestre peut dans de nombreux cas être considéré comme galiléen. Or, il existe plusieurs phénomènes dont l'interprétation dans un tel référentiel est impossible si on ne tient pas compte de son allure non galiléenne.

4—01072

On sait, par exemple, que l'accélération de la chute libre des corps par rapport à la surface de la Terre est la plus importante au voisinage des pôles. Le fait qu'elle diminue à mesure qu'on s'approche de l'équateur s'explique non seulement par le défaut de sphéricité de la Terre, mais aussi par l'action croissante des forces centrifuges. L'écart d'un corps en chute libre vers l'Est, l'affouillement des rives droites des cours d'eau dans l'hémisphère Nord et des rives gauches dans l'hémisphère Sud, la rotation du plan d'oscillation du pendule de Foucault, etc., ont la même origine. Ce sont autant de phénomènes liés au mouvement des corps par rapport à la surface terrestre qui peuvent être expliqués par l'action des forces de Coriolis.

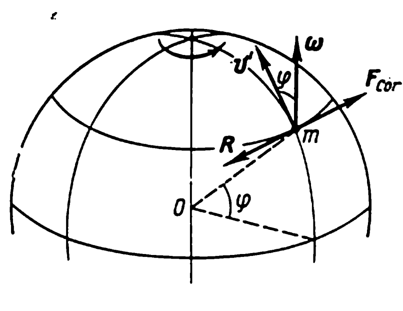


Fig. 23

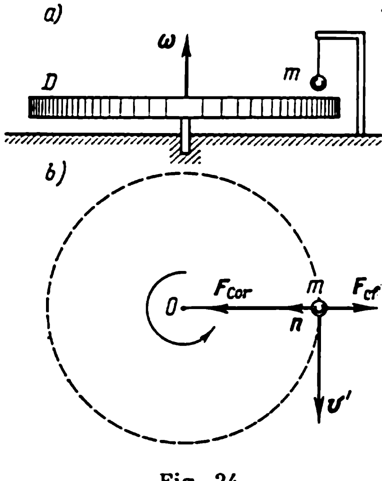


Fig. 24

Exemple. Un train de masse m se déplace suivant le méridien de latitude φ à la vitesse $\mathbf{v}'$. Trouver la force de la pression latérale avec laquelle le train agit sur les rails.

Dans le référentiel lié à la Terre (celle-ci tourne à une vitesse angulaire ω), la composante de l'accélération du train perpendiculaire au plan du méridien est nulle. Il en résulte que la somme des projections des forces qui agissent sur le train dans cette direction est nulle elle aussi. Or, cela signifie que la force de Coriolis $\mathbf{F}_{Cor}$ (fig. 23) doit être équilibrée par la force $\mathbf{R}$ de la pression latérale qui agit sur le train du côté du rail droit par rapport à la direction du mouvement du train, c'est-à-dire $\mathbf{F}_{Cor} = -\mathbf{R}$. D'après la troisième loi de Newton, le train agit sur ce rail dans le sens horizontal avec une force $\mathbf{R}' = -\mathbf{R}$. Par conséquent, $\mathbf{R}' = \mathbf{F}_{Cor} = 2m[\mathbf{v}'\omega]$. Le module du vecteur $\mathbf{R}'$ est égal à $R' = 2mv'\omega \sin \varphi$.

Le simple exemple qui suit montre comment « apparaissent » les forces d'inertie lors du passage d'un référentiel galiléen à un référentiel non galiléen.

Exemple. Un disque horizontal D qui tourne fou autour d'un axe vertical à une vitesse angulaire constante ω est placé à la surface d'une table. Une bille de masse m est suspendue au-dessus du disque comme c'est représenté sur la figure 24, *a*. Examinons le comportement de cette bille dans le référentiel K lié à la table (on suppose qu'il est galiléen) et dans le référentiel K' lié au disque en rotation.

Dans le référentiel galiléen K la bille subit l'action de la force de pesanteur et de la force de tension de la part du fil. Ces forces se compensent mutuellement et la bille est au repos dans K.

Dans le référentiel non galiléen K' la bille se déplace uniformément suivant un cercle avec une accélération normale $\omega^2\rho$, où ρ est la distance entre la bille et l'axe de rotation. On voit aisément que cette accélération est conditionnée par les forces d'inertie. En effet, en plus des deux forces indiquées qui se compensent mutuellement, deux forces encore agissent dans K' : la force centrifuge et la force de Coriolis (fig. 24, *b*). En prenant les projections de ces forces sur la normale $\mathbf{n}$ à la trajectoire au point où se trouve la bille, on peut écrire

$$mw'_n = F_{\text{Cor}} - F_{\text{cf}} = 2mv'\omega - m\omega^2\rho = m\omega^2\rho,$$

où on a pris en considération que dans le cas donné $v' = \omega\rho$ Il est donc clair que $w'_n = \omega^2\rho$.

Particularités des forces d'inertie. Pour résumer, énumérons les propriétés les plus importantes de ces forces qui les distinguent des forces d'interaction:

1. Les forces d'inertie sont dues non pas à l'interaction des corps, mais aux propriétés des référentiels non galiléens eux-mêmes. C'est ce qui fait que pour ces forces la troisième loi de Newton n'est pas respectée.

2. Ces forces existent seulement dans des référentiels non galiléens, il faut bien le retenir pour éviter des malentendus. Dans les référentiels galiléens les forces d'inertie n'existent généralement pas et la notion de *force* s'applique seulement dans le sens newtonien en tant que mesure de l'interaction des corps.

3. Toutes les forces d'inertie, tout aussi bien que les forces de gravitation, sont proportionnelles à la masse du corps. C'est pourquoi dans un champ homogène des forces d'inertie, tout comme dans le champ des forces de gravitation, tous les corps se déplacent avec la même accélération indépendamment de leur masse. C'est là un fait important dont la portée est très grande.

Principe d'équivalence. Le fait que les forces d'inertie tout comme les forces d'attraction sont proportionnelles aux masses des corps amène la conclusion importante suivante. Imaginons que nous nous trouvons dans un laboratoire fermé et ne pouvons pas observer le monde extérieur. Supposons, d'autre part, que nous ne savons pas où se trouve notre laboratoire: dans l'espace cosmique, ou disons, sur la Terre. En observant dans notre laboratoire les corps qui indépendamment de leur masse, tombent tous avec la même accélération nous ne pouvons pas, seulement à partir de ce fait, établir l'origine de cette accélération, dire si elle est due au champ de gravitation, à la translation accélérée du laboratoire lui-même, ou enfin, à l'ensemble de ces deux causes. Dans un tel laboratoire aucune expérience de chute libre des corps ne permettra pas de distinguer le champ homogène de gravitation du champ homogène des forces d'inertie.

Einstein a émis l'hypothèse qu'en général aucune expérience physique ne permet de distinguer un champ de gravitation homogène du champ homogène des forces d'inertie. Cette hypothèse érigée en postulat constitue ce qu'on appelle le *principe d'équivalence* des forces de gravitation et des forces d'inertie: ***dans un champ de gravitation homogène la démarche de tous les phénomènes physiques est absolument la même que dans un champ des forces d'inertie homogène correspondant.***

L'analogie profonde qui existe entre les forces d'inertie et les forces de gravitation a servi à Enstein de point de départ pour édifier sa *théorie de relativité générale* ou théorie relativiste de la gravitation.

A titre de conclusion il convient de noter que tout problème mécanique peut être résolu dans un référentiel galiléen et non galiléen. Le choix de tel ou tel référentiel est dicté généralement soit par la position du problème, soit par la nécessité d'obtenir la solution par le moyen le plus simple. A cet effet il est souvent le plus commode de faire appel précisément à des référentiels non galiléens (cf. problèmes 2.9-2.11).

Problèmes du chapitre 2

● 2.1. Une barre de masse m_1 repose sur une planche de masse m_2 qui est placée sur un plan horizontal lisse (fig. 25). Le coefficient de frottement entre la barre et la planche est k. On a appliqué à la planche une force horizontalt F qui dépend du temps t d'après la formule $F = at$ (a est une constante). Calculer

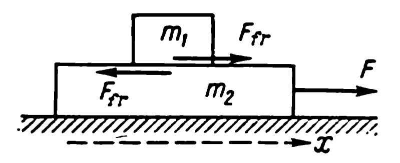


Fig. 25

1) l'instant t_0 lorsque la planche commence à glisser de sous la barre;

2) l'accélération de la barre w_1 et de la planche w_2 au cours du mouvement.

Solution. 1. Ecrivons l'équation fondamentale de la dynamique pour la barre et la planche, en prenant la direction positive de l'axe des x telle qu'elle est montrée sur le dessin:

$$m_1w_1 = F_{fr}; \quad m_2w_2 = F - F_{fr}. \quad (1)$$

A mesure que la force F augmente, la force de frottement F_{fr} augmente elle aussi (au départ c'est une force de frottement au repos). Mais la force de frottement F_{fr} possède une limite $F_{fr.\ max} = km_1g$. Tant que cette limite n'est pas atteinte, les deux corps se déplacent comme un tout unique avec la même accélération. Mais quand la force F_{fr} atteint la limite, la planche commence à glisser de sous la barre, c'est-à-dire

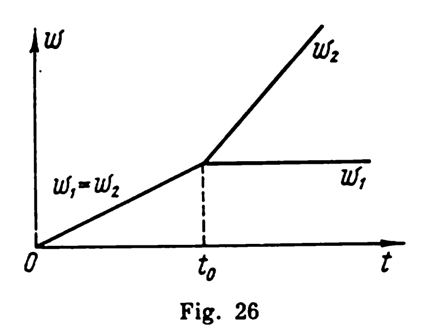


Fig. 26

$$w_2 \geqslant w_1.$$

En y portant w_1 et w_2 de (1), compte tenu du fait que $F_{fr} = km_1g$, on obtient

$$(at - km_1g)/m_2 \geqslant kg,$$

où le signe d'égalité correspond à l'instant $t = t_0$. On en tire

$$t_0 = (m_1 + m_2)\, kg/a.$$

2. Si $t \leqslant t_0$, il vient

$$w_1 = w_2 = at/(m_1 + m_2),$$

mais si $t \geqslant t_0$, alors

$$w_1 = kg = \text{const}; \quad w_2 = (at - km_1g)/m_2.$$

Les diagrammes des relations w_1 (t) et w_2 (t) sont représentés sur la figure 26.

● 2.2. Dans une installation (fig. 27) la pente fait avec l'horizon un angle $\alpha = 30°$. Le rapport entre les masses des corps $\eta = m_1/m_2 = 2/3$. Le coefficient de frottement entre le corps m_2 et la pente est $k=0,10$. Les masses de la poulie et des fils sont négligeables. Trouver le module et la direction de l'accélération du corps m_1, si le système commence à se déplacer à partir de l'état au repos.

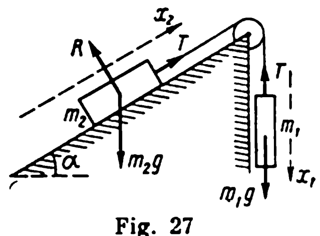


Fig. 27

Solution. On se pose tout de suite la question sur la direction de la force de frottement appliquée au corps m_2. Sans répondre à cette question il est impossible d'écrire en projection l'équation fondamentale de la dynamique pour le corps m_2, et le problème s'avère indéfini.

Raisonnons comme suit: supposons qu'en l'absence des forces de frottement le corps m_2 commence à glisser en haut. Il est clair que la force de frottement ne peut pas changer la direction du mouvement, mais seulement diminue l'accélération. De cette façon, la direction de la force de frottement qui agit sur le corps m_2 sera définie si on trouve la direction de l'accélération de ce corps en l'absence du frottement ($k = 0$). C'est par là donc que nous allons commencer.

Fig. 28

Ecrivons l'équation fondamentale de la dynamique en projections pour les deux corps, en adoptant la direction positive des axes des x_1 et des x_2 suivant la figure 27:

$$m_1 w_x = m_1 g - T; \quad m_2 w_x = T - m_2 g \sin\alpha,$$

où T est la tension du fil. En additionnant terme à terme les premiers et deuxièmes membres de ces équations, on obtient

$$w_x = \frac{\eta - \sin\alpha}{\eta + 1} g.$$

En portant dans cette expression $\eta = 2/3$ et $\alpha = 30°$, on obtient $w_x > 0$, c'est-à-dire sur la pente le corps m_2 commence à se déplacer *en haut*. La force de frottement que subit ce corps sera dirigée dans la direction opposée. Tenons compte de cette circonstance pour récrire l'équation du mouvement

$$m_1 w'_x = m_1 g - T'; \quad m_2 w'_x = T' - m_2 g \sin\alpha - k m_2 g \cos\alpha.$$

D'où

$$w'_x = \frac{\eta - \sin\alpha - k\cos\alpha}{\eta + 1} g \approx 0,05g.$$

● 2.3. Un fil inextensible passé par une poulie porte à ses deux extrémités des charges de masses m_1 et m_2, $m_1 > m_2$. On commence à déplacer la poulie en haut avec une accélération $\mathbf{w}_0$ par rapport à la Terre. En admettant que le fil glisse sur la poulie sans frottement, trouver l'accélération w_1 de la charge m_1 par rapport à la Terre.

Solution. Adoptons la direction positive de l'axe des x suivant la figure 28 et écrivons pour les deux charges l'équation fondamentale de la dynamique en projections sur cet axe:

$$m_1 w_{1x} = T - m_1 g, \quad (1)$$

$$m_2 w_{2x} = T - m_2 g. \quad (2)$$

Ces deux équations comptent trois inconnues: w_{1x}, w_{2x} et T. Pour composer la troisième équation profitons de la relation cinématique entre les accéléra-

tions

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_0 + \mathbf{w}'; \qquad \mathbf{w}_2 = \mathbf{w}_0 - \mathbf{w}',$$

où $\mathbf{w}'$ est l'accélération de la charge de masse m_1 par rapport à la poulie. En additionnant terme à terme le premier et le deuxième membres de ces égalités, on obtient

$$\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = 2\mathbf{w}_0,$$

ou en projections sur l'axe des x,

$$w_{1x} + w_{2x} = 2w_0. \tag{3}$$

En résolvant ensemble les équations (1), (2) et (3), on trouve

$$w_{1x} = [2m_2w_0 + (m_2 - m_1)\,g]/(m_1 + m_2).$$

Il est donc clair que pour w_0 donné le signe de w_{1x} dépend du rapport entre les masses m_1 et m_2.

● 2.4. Une petite rondelle se déplace sur une pente dont le coefficient de frottement est $k = \operatorname{tg} \alpha$, où α est l'angle entre la pente et l'horizon. Trouver la relation entre la vitesse v de la rondelle et l'angle φ entre le vecteur $\mathbf{v}$ et l'axe des x (fig. 29), si à l'instant initial $v = v_0$ et $\varphi = \pi/2$.

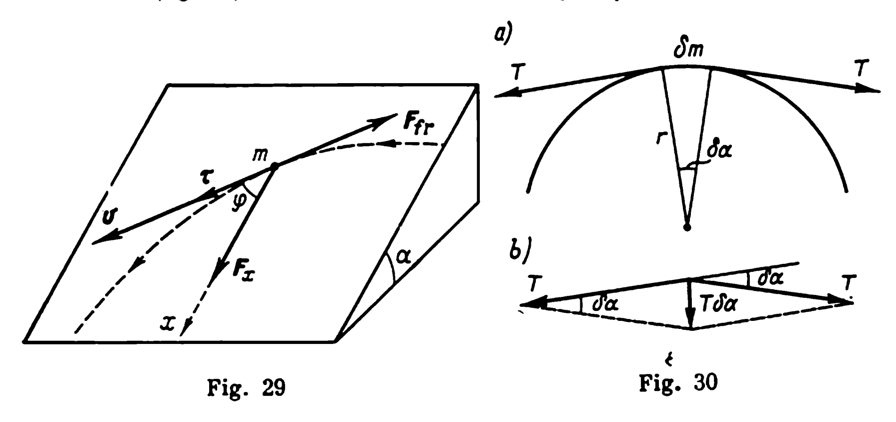


Fig. 29

Fig. 30

Solution. L'accélération de la rondelle le long du plan est déterminée par la composante de la force de pesanteur projetée sur ce plan: $F_x = mg \sin \alpha$, et la force de frottement $F_{fr} = kmg \cos \alpha$. Dans notre cas, $k = \operatorname{tg} \alpha$; donc

$$F_{fr} = F_x = mg \sin \alpha.$$

Cherchons les projections de l'accélération sur la direction de la tangente à la trajectoire et sur l'axe des x:

$$mw_\tau = F_x \cos \varphi - F_{fr} = mg \sin \alpha\,(\cos \varphi - 1);$$

$$mw_x = F_x - F_{fr} \cos \varphi = mg \sin \alpha\,(1 - \cos \varphi).$$

Il est clair que $w_\tau = -w_x$; or, cela signifie que la différence entre la vitesse v et sa projection v_x n'est égale qu'à une certaine constante C ne dépendant pas du temps, c'est-à-dire

$$v = -v_x + C,$$

où $v_x = v \cos \varphi$. La constante C se calcule à partir de la condition initiale $v = v_0$, d'où $C = v_0$. Il en résulte

$$v = v_0/(1 + \cos \varphi).$$

A mesure que le temps croît, $\varphi \to 0$ et $v \to v_0/2$.

● 2.5. Le coefficient d'élasticité d'un fil élastique fin homogène de masse m et de longueur l_0 (à l'état non tendu) est $\varkappa$. Le fil a été collé bout à bout puis

posé sur un plan horizontal lisse; on lui a donné la forme d'un cercle pour l'accélérer jusqu'à une vitesse angulaire ω autour d'un axe vertical passant par le centre du cercle. Trouver la tension du fil en cet état.

Solution. Extrayons en pensée un petit élément du fil de masse δm, suivant la figure 30, *a*. Cet élément se déplace suivant un cercle sous l'action de la force qui constitue une somme géométrique de deux vecteurs, dont chacun est égal en module à la tension T cherchée (fig. 30, *b*). Donc, d'après la deuxième loi de Newton

$$\delta m \cdot \omega^2 r = T \cdot \delta\alpha. \tag{1}$$

Tenons compte que $\delta m = (m/2\pi)\,\delta\alpha$ et $r = l/2\pi$; l est la longueur du fil en rotation. Alors (1) se met sous la forme

$$m\omega^2 l/4\pi^2 = T. \tag{2}$$

D'autre part, d'après la loi de Hooke,

$$T = \varkappa\,(l - l_0). \tag{3}$$

En éliminant l de (2) et (3), on obtient

$$T = \frac{\varkappa l_0}{4\pi^2\varkappa/m\omega^2 - 1}.$$

Notons que dans le cas d'un fil inextensible ($\varkappa = \infty$), $T = m\omega^2 l_0/4\pi^2$.

● **2.6. Intégration des équations du mouvement.** Une particule de masse m se déplace sous l'action de la force $\mathbf{F}$. On connaît son rayon vecteur $\mathbf{r}(0)$ et sa vitesse $\mathbf{v}(0)$ à l'instant $t = 0$; ce sont les conditions initiales. Trouver la position de la particule en fonction du temps, si

1) $\mathbf{F} = \mathbf{F}_0 \sin \omega t$; $\mathbf{r}(0) = 0$; $\mathbf{v}(0) = 0$;
2) $\mathbf{F} = -k\mathbf{v}$; $\mathbf{r}(0) = 0$; $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$;
3) $\mathbf{F} = -\varkappa\mathbf{r}$; $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0$; $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$; de plus $\mathbf{v}_0 \parallel \mathbf{r}_0$.

Ici $\mathbf{F}_0$ est un vecteur constant; ω, k, $\varkappa$, des constantes positives.

Solution. 1. Dans le cas considéré. d'après l'équation fondamentale de la dynamique, l'accélération

$$d\mathbf{v}/dt = (\mathbf{F}_0/m) \sin \omega t.$$

On en tire l'accroissement élémentaire du vecteur vitesse $d\mathbf{v}$ en un temps dt, puis l'accroissement de ce vecteur en un temps de 0 à t

$$\mathbf{v}(t) - \mathbf{v}(0) = (\mathbf{F}_0/m) \int_0^t \sin \omega t\, dt.$$

En retenant que $\mathbf{v}(0) = 0$, on obtient après l'intégration

$$\mathbf{v}(t) = (\mathbf{F}_0/m\omega)(1 - \cos \omega t).$$

Cherchons maintenant $d\mathbf{r}$, le déplacement élémentaire ou l'accroissement du rayon vecteur $\mathbf{r}$ de la particule en un temps dt: $d\mathbf{r} = \mathbf{v}(t)dt$. Quant à l'accroissement du rayon vecteur en un temps de 0 à t

$$\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(0) = (\mathbf{F}_0/m\omega) \int_0^t (1 - \cos \omega t)\, dt.$$

En intégrant cette expression et en tenant compte que $\mathbf{r}(0) = 0$, on trouve

$$\mathbf{r}(t) = (\mathbf{F}_0/m\omega^2)(\omega t - \sin \omega t).$$

La figure 31 représente les diagrammes des relations $v_x(t)$ et $x(t)$, projections des vecteurs **v** et **r** sur l'axe des x choisi dans la direction du mouvement de la particule, c'est-à-dire dans la direction du vecteur $\mathbf{F}_0$.

2. Ici l'accélération

$$d\mathbf{v}/dt = -(k/m)\,\mathbf{v}.$$

Pour intégrer cette équation passons à la forme scalaire, au module du vecteur **v**

$$dv/v = -(k/m)\,dt.$$

L'intégration de cette équation (compte tenu des conditions initiales) donne: $\ln(v/v_0) = -(k/m)\,t$. Après le calcul du logarithme reprenons la forme vecto-

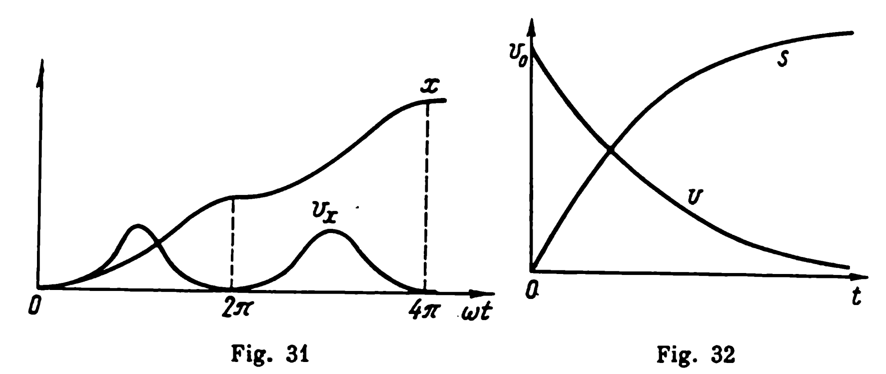


Fig. 31

Fig. 32

rielle

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 e^{-kt/m}.$$

Intégrons cette dernière équation encore une fois (également compte tenu des conditions initiales):

$$\mathbf{r} = \int_0^t \mathbf{v}\,dt = (m\mathbf{v}_0/k)\,(1 - e^{-kt/m}).$$

La figure 32 représente les diagrammes de la vitesse v et du chemin parcouru s en fonction du temps t (dans notre cas $s = r$).

3. Dans le cas considéré le mouvement aura lieu suivant une droite qui coïncide avec le rayon vecteur **r**. Prenons dans cette direction l'axe x et écrivons l'équation fondamentale de la dynamique en projection sur cet axe sous la forme

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \tag{1}$$

où $\ddot{x}$ est la dérivée seconde de la coordonnée par rapport au temps (projection du vecteur accélération); $\omega^2 = \varkappa/m$. L'équation (1) s'appelle *équation des oscillations harmoniques*.

Dans les mathématiques on démontre que la solution générale de cette équation s'écrit:

$$x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t, \tag{2}$$

où A et B sont des constantes arbitraires. Les contraintes imposées ordinairement à ces constantes sont généralement déterminées à partir des conditions initiales. Dans notre cas, par exemple, à l'instant $t = 0$,

$$x(0) = x_0 \quad \text{et} \quad v_x(0) = v_{0x}, \tag{3}$$

où x_0 et v_{0x} sont les projections des vecteurs $\mathbf{r}_0$ et $\mathbf{v}_0$ sur l'axe des x. Après avoir porté (2) dans (3), on obtient $A = x_0$; $B = v_{0x}/\omega$. La suite est évidente.

● **2.7.** Une particule de masse m se déplace dans un certain plan sous l'action de la force F constante en module et dont la direction tourne dans ce plan à une vitesse angulaire constante ω. A l'instant $t = 0$ la vitesse de la particule est nulle. Trouver le module de cette vitesse en fonction du temps t, ainsi que le chemin parcouru par la particule entre deux arrêts successifs.

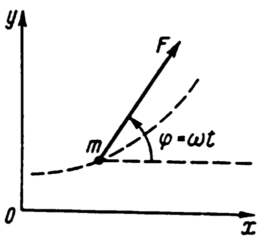


Fig. 33

Solution. Associons au plan donné le système de coordonnées x, y (fig. 33), en choisissant la direction de l'axe des x dans le sens qu'avait le vecteur force à l'instant $t = 0$. Alors, l'équation fondamentale de la dynamique en projections sur les axes des x et des y sera de la forme

$$m dv_x/dt = F \cos \omega t; \qquad m dv_y/dt = F \sin \omega t.$$

En intégrant ces deux équations sur le temps, compte tenu de la condition initiale $v(0) = 0$, on obtient

$$v_x = (F/m\omega) \sin \omega t; \quad v_y = (F/m\omega)(1 - \cos \omega t).$$

Le module du vecteur vitesse de la particule

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = (2F/m\omega)/\sin (\omega t/2).$$

Il est clair que la vitesse v s'annule en un intervalle de temps Δt qui peut se calculer d'après l'égalité $\omega \Delta t/2 = \pi$. Le chemin parcouru est donc

$$s = \int_0^{\Delta t} v\, dt = 8F/m\omega^2.$$

● **2.8.** Une voiture se déplace avec une accélération tangentielle constante w_τ sur une surface horizontale en décrivant un cercle de rayon R. Le coefficient de frottement entre les roues de la voiture et la surface est k. Quel chemin s parcourra la voiture sans glissement si la vitesse initiale est nulle?

Solution. A mesure que la vitesse de la voiture augmente, l'accélération normale croît aussi bien que l'accélération totale de la voiture. Le mouvement aura lieu sans glissement tant que l'accélération totale nécessaire sera assurée par la force de frottement. La valeur maximale possible de cette force $F_{max} = kmg$, où m est la masse de la voiture. La valeur maximale de l'accélération totale (d'après l'équation fondamentale de la dynamique $m\mathbf{w} = \mathbf{F}$) s'écrit donc

$$w_{max} = kg. \tag{1}$$

D'autre part,

$$w_{max} = \sqrt{w_\tau^2 + (v^2/R)^2}, \tag{2}$$

où v est la vitesse de la voiture à l'instant où son accélération devient maximale. Cette vitesse et le chemin s cherché sont liés par la formule

$$v^2 = 2 w_\tau s. \tag{3}$$

En exprimant v à partir de (1) et (2) et en la portant dans (3) on obtient

$$s = (R/2) \sqrt{(kg/w_\tau)^2 - 1}.$$

On voit sans peine que la solution a un sens avec l'expression positive du radicande, c'est-à-dire avec $w_\tau < kg$.

● **2.9. Référentiel non galiléen.** Un satellite se déplace dans le plan équatorial de la Terre de l'Ouest à l'Est suivant une orbite circulaire de rayon r. En négligeant l'accélération conditionnée par le mouvement de la Terre autour du Soleil, trouver l'accélération w' du satellite dans un référentiel lié à la Terre.

Solution. Soit K un référentiel galiléen (par convention) dans lequel l'axe de rotation de la Terre est au repos, et K', un référentiel non galiléen lié à la Terre et animé d'un mouvement de rotation à une vitesse angulaire ω par rapport à K.

Nous nous intéressons à l'accélération w' du satellite dans K'. A cet effet visualisons d'abord toutes les forces appliquées au satellite dans ce référentiel: la force d'attraction $\mathbf{F}$, la force de Coriolis $\mathbf{F}_{\text{Cor}}$ et la force centrifuge $\mathbf{F}_{\text{cf}}$ (fig. 34, vue du côté du pôle Nord de la Terre).

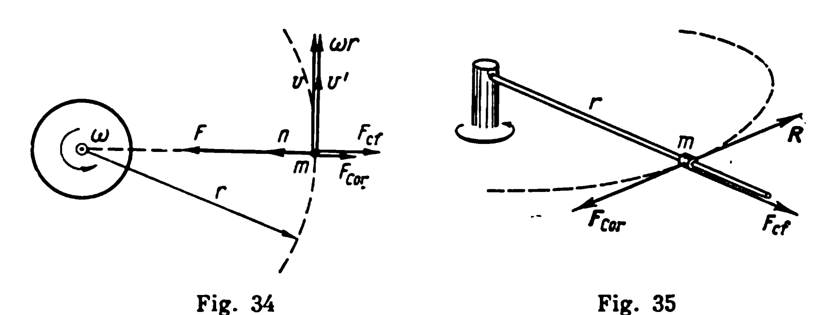


Fig. 34 Fig. 35

Utilisons maintenant l'équation (2.18) en adoptant $\mathbf{w}_0 = 0$ (par convention). Le satellite se déplace suivant une orbite circulaire dans K'; projetons donc l'équation (2.18) sur la normale $\mathbf{n}$ à la trajectoire:

$$mw' = F - 2mv'\omega - m\omega^2 r, \tag{1}$$

où $F = \gamma mM/r^2$; m et M sont les masses du satellite et de la Terre. Il reste à trouver la vitesse v' du satellite dans K'. A cet effet, utilisons la relation cinématique (1.24) sous la forme scalaire

$$v' = v - \omega r, \tag{2}$$

où v est la vitesse du satellite dans K (fig. 34) et pour calculer v, l'équation du mouvement du satellite dans K:

$$mv^2/r = \gamma mM/r^2. \tag{3}$$

En résolvant ensemble les équations (1), (2), (3), on obtient

$$w' = (1 - \omega r\sqrt{r/\gamma M})^2 \gamma M/r^2.$$

En particulier, $w' = 0$ avec $r = \sqrt[3]{\gamma M/\omega^2} = 4{,}2\cdot 10^3$ km. Un tel satellite s'appelle *stationnaire*: il est fixe par rapport à la surface terrestre.

● 2.10. Un petit manchon de masse m glisse librement sur une tige lisse horizontale, qui tourne à une vitesse angulaire constante ω autour d'un axe vertical fixe passant par l'une de ses extrémités. Trouver la composante horizontale de la force qui agit sur le manchon de la part de la tige à l'instant où le manchon se trouve à la distance r de l'axe. A l'instant initial le manchon se trouvait directement près de l'axe et sa vitesse était négligeable.

Solution. Examinons le mouvement du manchon dans un référentiel en rotation lié invariablement à la tige. Dans ce référentiel le mouvement du manchon est rectiligne; cela signifie que la force cherchée est équilibrée par la force de Coriolis (fig. 35)

$$\mathbf{R} = -\mathbf{F}_{\text{Cor}} = 2m\,[\boldsymbol{\omega}\mathbf{v}']. \tag{1}$$

Le problème se ramène ainsi au calcul de la vitesse $\mathbf{v}'$ du manchon par rapport à la tige. D'après (2.19)

$$dv'/dt = F_{\text{cf}}/m = \omega^2 r.$$

Transformons cette équation en tenant compte que $dt = dr/v'$. Alors, il vient

$$v'dv' = \omega^2 r dr.$$

En intégrant cette équation compte tenu des conditions initiales ($v' = 0$; $r = 0$), on trouve $v' = \omega r$, ou sous une forme vectorielle,

$$\mathbf{v}' = \omega \mathbf{r}. \qquad (2)$$

En portant (2) dans (1), on obtient

$$\mathbf{R} = 2m\omega\,[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}].$$

● **2.11. Stabilité du mouvement.** Un anneau de fil de fer de rayon r est mis en rotation à une vitesse angulaire constante ω autour de l'axe vertical OO' passant par son diamètre. L'anneau porte un petit manchon A qui glisse librement (sans frottement). Trouver l'angle ϑ (fig. 36) qui correspond à la position stable du manchon.

Solution. Examinons le comportement du manchon dans un référentiel lié à l'anneau en rotation. Son mouvement le long de l'anneau sera déterminé par la projection F_τ de la résultante sur la direction du vecteur unité $\boldsymbol{\tau}$ en A. La figure 36 montre que

$$F_\tau = F_{cf} \cos\vartheta - mg \sin\vartheta,$$

où le deuxième membre comprend les projections de la force centrifuge et de la force de pesanteur. Compte tenu du fait que $F_{cf} = m\omega^2 r \sin\vartheta$, récrivons l'expression précédente comme suit

$$F_\tau \sim \sin\vartheta\,(\cos\vartheta - g/\omega^2 r). \qquad (1)$$

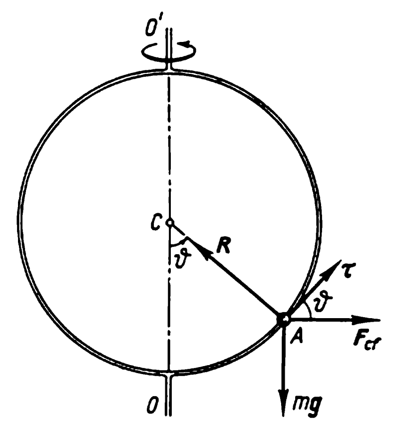


Fig. 36

La condition d'équilibre ($F_\tau = 0$) permet de trouver deux valeurs de l'angle ϑ_0, qui la rendent possible: $\sin\vartheta_0 = 0$ et $\cos\vartheta_0 = g/\omega^2 r$. La première condition peut être réalisée quelles que soient les valeurs de ω, alors que la deuxième seulement avec $g/\omega^2 r < 1$. De la sorte, pour de petits ω il n'existe qu'une position d'équilibre, au point inférieur ($\vartheta_0 = 0$); alors que de grands ω ($\omega > \sqrt{g/r}$) rendent également possible une autre position d'équilibre, déterminée par la deuxième condition.

Pour la stabilité d'un état d'équilibre défini il faut que, lorsque le manchon sort d'état d'équilibre (de n'importe quel côté), la force F_τ soit orientée dans le sens inverse, vers la position d'équilibre, c'est-à-dire le signe de F_τ doit être opposé à celui de l'écart $\Delta\vartheta$ par rapport à l'angle d'équilibre ϑ_0.

Lorsque l'écart $d\vartheta$ par rapport à l'angle d'équilibre ϑ_0 est petit, la force δF_τ qui apparaît peut s'obtenir comme la dérivée de l'expression (1)

$$\delta F_\tau \sim [\cos\vartheta_0\,(\cos\vartheta_0 - g/\omega^2 r) - \sin^2\vartheta_0]\,d\vartheta.$$

En position d'équilibre inférieure ($\vartheta_0 = 0$)

$$\delta F_\tau \sim (1 - g/\omega^2 r)\,d\vartheta. \qquad (2)$$

Cette position d'équilibre sera stable lorsque l'expression entre parenthèses est négative, c'est-à-dire avec $\omega < \sqrt{g/r}$.

Dans l'autre position d'équilibre ($\cos\vartheta_0 = g/\omega^2 r$)

$$\delta F_\tau \sim -\sin^2\vartheta_0 d\vartheta.$$

Il est clair que cette position d'équilibre (si elle existe) est toujours stable.

Ainsi, tant que n'existe que la position d'équilibre inférieure (avec $\omega < \sqrt{g/r}$), elle est toujours stable. Mais lorsqu'apparaît l'autre position d'équilibre ($\omega > \sqrt{g/r}$), d'après (2) la position inférieure devient instable, et le manchon passe immédiatement de la position inférieure à la position supérieure qui est toujours stable.

CHAPITRE 3

LOI DE CONSERVATION DE L'ÉNERGIE

§ 3.1. Sur les lois de conservation

Tout corps ou ensemble des corps est au fond un système de points matériels ou de particules. Si le système change dans le temps, on dit que c'est son *état* qui change. L'état d'un système est caractérisé par la donnée simultanée des positions (coordonnées) et des vitesses de toutes ses particules.

Si on connaît les lois qui régissent les forces appliquées aux particules du système et l'état du système à un certain instant initial, on peut, comme le montre la pratique, prédire son comportement ultérieur, c'est-à-dire trouver l'état du système à un instant quelconque. C'est ainsi qu'on résout, par exemple, le problème relatif au mouvement des planètes du Système solaire.

Or, l'examen détaillé du comportement d'un système à l'aide des équations du mouvement est parfois si difficile (par exemple, du fait de la complexité du système lui-même) qu'il est pratiquement impossible de mener la solution à bonne fin. Lorsque les lois des forces en action sont inconnues, cette approche s'avère irréalisable même en principe. D'autre part, il existe plusieurs problèmes dans lesquels l'examen détaillé du mouvement des particules isolées n'a tout simplement aucun sens (par exemple, la description du mouvement des molécules isolées dans le gaz).

La question se pose donc tout à fait naturellement, à savoir s'il n'existe pas de principes de caractère général découlant des lois de Newton, qui permettraient d'aborder d'une autre façon et de tourner dans une certaine mesure de telles difficultés.

Il s'avère qu'en effet de tels principes existent. Ce sont ce qu'on appelle les *lois de conservation*.

Nous avons déjà dit que lors du mouvement d'un système son état change dans le temps. Il existe pourtant des grandeurs qui possèdent la propriété remarquable et très importante de se conserver dans le temps. Parmi ces grandeurs conservatives le rôle capital revient à l'*énergie*, l'*impulsion* et le *moment cinétique*. Ces trois grandeurs possèdent la propriété d'additivité, dont l'intérêt est considérable: leur valeur, pour un système composé de parties dont l'interaction est négligeable, est égale à la somme des valeurs

de chaque partie prise séparément (d'ailleurs, pour le moment cinétique et l'impulsion la propriété d'additivité est observée même en présence de l'interaction). C'est grâce précisément à la propriété d additivité que ces trois grandeurs jouent un rôle si important.

Il s'est avéré que les lois de conservation de l'énergie, de l'impulsion et du moment cinétique sont liées aux propriétés fondamentales du temps et de l'espace, telles l'homogénéité et l'isotropie. Plus particulièrement, la loi de conservation de l'énergie est liée à l'homogénéité du temps, et les lois de conservation de l'impulsion et du moment cinétique respectivement à l'homogénéité et l'isotropie de l'espace. Ce qui vient d'être dit doit être entendu dans le sens que les lois de conservation mentionnées peuvent s'obtenir à partir de la deuxième loi de Newton si on y ajoute les propriétés correspondantes de symétrie du temps et de l'espace. Nous ne discuterons pourtant pas cette question plus en détail.

Les lois de conservation de l'énergie, de l'impulsion et du moment cinétique se rapportent aux principes fondamentaux de la physique. Leur rôle s'est accru surtout lorsqu'on a établi qu'elles dépassent de beaucoup le cadre de la mécanique et constituent les lois universelles de la nature. De toute façon, jusqu'à présent aucun phénomène n'a été découvert qui violerait ces lois. Elles « s'exercent » sans faute aussi bien dans le domaine des particules élémentaires que dans celui des objets cosmiques, dans la physique de l'atome et dans celle du solide, et figurent parmi les lois peu nombreuses sur lesquelles repose la physique moderne.

Grâce à une nouvelle approche des phénomènes mécaniques différents, les lois de conservation sont devenues un outil puissant et efficace de la recherche au service des physiciens. Ce rôle très important des lois de conservation en tant qu'outil de recherche est justifié pour plusieurs raisons.

1. Les lois de conservation ne dépendent ni des trajectoires des particules, ni du caractère des forces en action. Elles permettent donc de tirer plusieurs conclusions générales et essentielles sur les propriétés des processus mécaniques différents, sans entrer dans le détail de leur étude à l'aide des équations du mouvement. S'il s'avère, par exemple, qu'un certain processus contredit les lois de conservation, on peut affirmer d'emblée qu'il est impossible et il est absurde de tenter de le réaliser.

2. Le fait que les lois de conservation ne dépendent pas du caractère des forces en action, permet de les appliquer même lorsque les forces sont en général inconnues. Dans ces cas les lois de conservation sont l'outil unique et irremplaçable de la recherche. Il en est ainsi, par exemple, dans la physique des particules élémentaires.

3. Même dans le cas où les forces sont connues exactement, les lois de conservation peuvent apporter une contribution importante à la résolution de nombreux problèmes sur le mouvement des particules. Bien que tous ces problèmes puissent être résolus à l'aide des équations du mouvement (sous ce rapport les lois de conservation

ne fourniraient aucune information supplémentaire), les lois de conservation permettent très souvent d'obtenir des solutions par la voie la plus simple et élégante en nous évitant des calculs lourds et fatigants. Aussi, quand il s'agit de résoudre de nouveaux problèmes, se tient-on généralement à l'ordre suivant : d'abord on applique l'une après l'autre les lois de conservation correspondantes et ce n'est que si cela ne suffit pas, on recourt aux équations du mouvement.

Nous commencerons l'étude par la loi de conservation de l'énergie, en introduisant la notion d'énergie par l'intermédiaire de la notion de travail.

§ 3.2. Travail et puissance

Travail. Soit une particule qui sous l'action d'une force **F** effectue un déplacement suivant une certaine trajectoire *1-2* (fig. 37). Dans le cas général, au cours du mouvement d'une particule la force **F** peut changer aussi bien en module qu'en direction. Examinons le déplacement élémentaire $d\mathbf{r}$ dans les limites duquel **F** peut être considérée comme constante.

L'action de la force **F** lors du déplacement $d\mathbf{r}$ est caractérisée par la grandeur égale au produit scalaire $\mathbf{F}\,d\mathbf{r}$ qu'on appelle *travail élémentaire* de la force **F** lors du déplacement $d\mathbf{r}$. On peut la mettre également sous une autre forme

$$\mathbf{F}\,d\mathbf{r} = F \cos \alpha \, ds = F_s \, ds,$$

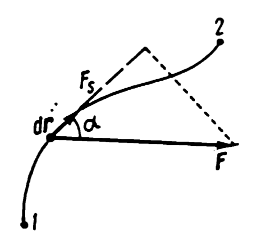


Fig. 37

où α est l'angle entre les vecteurs **F** et $d\mathbf{r}$; $ds = |d\mathbf{r}|$, le chemin élémentaire ; F_s, la projection du vecteur **F** sur le vecteur $d\mathbf{r}$ (fig. 37).

Ainsi, le travail élémentaire de la force **F** lors du déplacement $d\mathbf{r}$

$$\delta A = \mathbf{F}\,d\mathbf{r} = F_s ds. \tag{3.1}$$

δA est une grandeur algébrique ; elle peut être positive ou négative en fonction de l'angle entre les vecteurs **F** et $d\mathbf{r}$ (ou du signe de la projection F_s du vecteur **F** sur le vecteur $d\mathbf{r}$), et en particulier, nulle (si $\mathbf{F} \perp d\mathbf{r}$, c'est-à-dire si $F_s = 0$).

En sommant (intégrant) l'expression (3.1) sur tous les secteurs élémentaires du chemin parcouru du point *1* au point *2*, calculons le travail de la force **F** sur le chemin considéré :

$$\boxed{A = \int_1^2 \mathbf{F}\,d\mathbf{r} = \int_1^2 F_s ds.} \tag{3.2}$$

On peut attribuer à l'expression (3.2) un sens géométrique concret. Représentons le diagramme de F_s comme fonction de la position de la particule sur la trajectoire. Supposons, par exemple, que ce diagramme est de la forme donnée par la figure 38. Cette figure montre que le travail élémentaire δA est numériquement égal à la surface de la bande hachurée, et le travail A sur le chemin du point *1* au point *2*, à la surface de la figure délimitée par la courbe, les

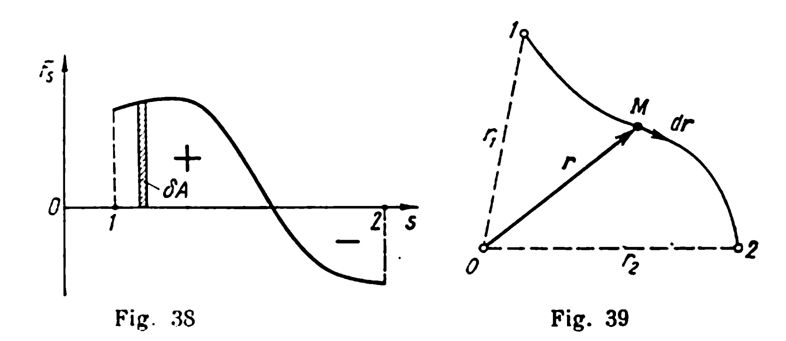


Fig. 38 Fig. 39

ordonnées *1* et *2* et l'axe des s. Dans ces conditions, la surface de la figure au-dessus de l'axe des s est prise avec le signe plus (elle correspond au travail positif), et la surface au-dessous de l'axe des s, avec le signe moins (elle correspond au travail négatif).

Examinons quelques exemples de calcul du travail.

Travail d'une force élastique $\mathbf{F} = -\varkappa\mathbf{r}$, où $\mathbf{r}$ est le rayon vecteur de la particule M par rapport au point O (fig. 39). Déplaçons la particule M qui subit l'action de cette force suivant un chemin arbitraire du point *1* au point *2*. Cherchons d'abord le travail élémentaire de $\mathbf{F}$ lors du déplacement élémentaire $d\mathbf{r}$:

$$\delta A = \mathbf{F}\, d\mathbf{r} = -\varkappa\mathbf{r}\, d\mathbf{r}.$$

Le produit scalaire $\mathbf{r}\, d\mathbf{r} = r\,(d\mathbf{r})_r$, où $(d\mathbf{r})_r$ est la projection de $d\mathbf{r}$ sur le vecteur $\mathbf{r}$. Cette projection est égale à dr, accroissement du module du vecteur $\mathbf{r}$. Donc $\mathbf{r}\, d\mathbf{r} = r\, dr$ et

$$\delta A = -\varkappa r\, dr = -d\,(\varkappa r^2/2).$$

Maintenant calculons le travail de la force considérée sur tout le chemin, c'est-à-dire intégrons la dernière expression du point *1* au point *2*:

$$A = -\int_1^2 d\,(\varkappa r^2/2) = \varkappa r_1^2/2 - \varkappa r_2^2/2. \tag{3.3}$$

Travail de la force de gravitation (ou coulombienne). Soit une masse ponctuelle fixe (charge) à l'origine du vecteur $\mathbf{r}$ (fig. 39).

Calculons le travail de la force de gravitation (coulombienne) lors du déplacement de la particule A du point *1* au point *2* sur un chemin arbitraire. La force qui agit sur la particule A peut être mise sous la forme

$$\mathbf{F} = (\alpha/r^3)\,\mathbf{r},$$

où $\alpha = \begin{cases} -\gamma m_1 m_2, & \text{interaction de gravitation;} \\ k q_1 q_2, & \text{interaction coulombienne.} \end{cases}$

Calculons d'abord le travail élémentaire de cette force lors du déplacement $d\mathbf{r}$:

$$\delta A = \mathbf{F}\,d\mathbf{r} = (\alpha/r^3)\,\mathbf{r}\,d\mathbf{r}.$$

Tout comme dans le cas précédent, le produit scalaire $\mathbf{r}\,d\mathbf{r} = r\,dr$; donc

$$\delta A = \alpha\,dr/r^2 = -d\,(\alpha/r).$$

Le travail de cette même force sur tout le chemin du point *1* au point *2*

$$A = -\int_1^2 d\,(\alpha/r) = \alpha/r_1 - \alpha/r_2. \tag{3.4}$$

Travail de la force de pesanteur homogène $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$. Ecrivons cette force sous la forme $\mathbf{F} = -mg\mathbf{k}$, où $\mathbf{k}$ est le vecteur unité de l'axe vertical des z, et adoptons sa direction positive vers le haut (fig. 40). Le travail élémentaire de la force de pesanteur lors du déplacement $d\mathbf{r}$

$$\delta A = \mathbf{F}\,d\mathbf{r} = -mg\mathbf{k}\;d\mathbf{r}.$$

Le produit scalaire $\mathbf{k}\,d\mathbf{r} = (d\mathbf{r})_\mathbf{k}$, où $(d\mathbf{r})_\mathbf{k}$ est la projection de $d\mathbf{r}$ sur le vecteur unité $\mathbf{k}$, égale à dz, accroissement de l'ordonnée z. Donc, $\mathbf{k}\,d\mathbf{r} = dz$ et

$$\delta A = -mg\,dz = -d\,(mgz).$$

Fig. 40

Quant au travail de cette force sur tout le chemin du point *1* au point *2*

$$A = -\int_1^2 d\,(mgz) = mg\,(z_1 - z_2). \tag{3.5}$$

Les forces examinées présentent de l'intérêt dans ce sens que, comme le montrent les formules (3.3)-(3.5), le travail qu'elles réalisent ne dépend pas de la forme du chemin entre *1* et *2*, mais seulement de la position de ces points. Cette propriété importante n'est pourtant pas inhérente à toutes les forces. La force de frottement,

par exemple, ne la possède pas: son travail dépend non seulement de la position des points initial et final, mais encore de la forme du chemin entre ces points.

Jusque-là nous avons parlé du travail d'une seule force. Or, si une particule en mouvement subit l'action de plusieurs forces dont la résultante est $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \ldots$, on peut montrer sans peine que lors d'un certain déplacement le travail de la résultante $\mathbf{F}$ est égal à la somme algébrique des travaux effectués séparément par chaque force lors de ce même déplacement. En effet,

$$A = \int (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \ldots)\, d\mathbf{r} = \int \mathbf{F}_1\, d\mathbf{r} + \int \mathbf{F}_2\, d\mathbf{r} + \ldots = \\ = A_1 + A_2 + \ldots . \quad (3.6)$$

Puissance. Pour définir la vitesse à laquelle s'effectue le travail on introduit la grandeur appelée *puissance*. Par définition, la puissance est le travail effectué par une force par unité de temps. Si en un intervalle de temps dt la force $\mathbf{F}$ effectue le travail $\mathbf{F}\, d\mathbf{r}$, la puissance développée par cette force à l'instant donné est $N = \mathbf{F}\, d\mathbf{r}/dt$. Compte tenu que $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}$, on obtient

$$\boxed{N = \mathbf{F}\mathbf{v}.} \quad (3.7)$$

De la sorte, la puissance développée par la force $\mathbf{F}$ est égale au produit scalaire du vecteur force par le vecteur vitesse à laquelle se déplace le point d'application de la force considérée. Comme le travail, la puissance est une grandeur algébrique.

En connaissant la puissance de la force $\mathbf{F}$, on peut trouver également le travail qu'effectue cette force en un intervalle de temps t. En effet, en présentant l'expression (3.2) sous la forme $\mathbf{F}\, d\mathbf{r} = \mathbf{F}\mathbf{v}\, dt = N\, dt$, il vient

$$A = \int_0^t N\, dt.$$

En guise d'exemple cf. le problème 3.1.

A titre de conclusion attirons l'attention sur une circonstance importante. Lorsqu'on parle du travail (ou de la puissance) il convient dans chaque cas concret d'indiquer ou de se représenter nettement de *quelle force* (ou forces) *précisément* il s'agit. Sinon, des malentendus sont inévitables.

§ 3.3. Champ de forces conservatif

On appelle champ de forces une région de l'espace en chaque point duquel la particule qui y est placée subit l'action d'une force qui change régulièrement d'un point à l'autre, tel, par exemple, le champ de gravitation de la Terre, ou le champ de forces de résistance

dans un flux de liquide (gaz). Si en chaque point d'un champ de forces la force ne dépend pas du temps, le champ est dit *stationnaire*. Il est clair qu'un champ de forces stationnaire dans un référentiel, peut ne pas l'être dans un autre. Dans un champ de forces stationnaire, la force ne dépend que de la position de la particule.

Le travail qu'effectuent les forces d'un champ lors du déplacement d'une particule du point *1* au point *2* dépend en général du chemin parcouru. Pourtant, parmi les champs de forces stationnaires il en existe où ce travail ne dépend pas du chemin entre *1* et *2*. Cette classe des champs possède plusieurs propriétés fort importantes et tient une place particulière en physique. Nous allons donc passer à l'étude de ces propriétés.

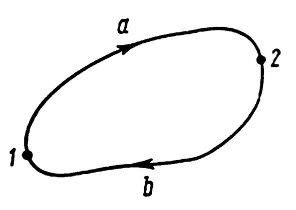


Fig. 41

Définition. Un champ de forces stationnaire dans lequel le travail de la force du champ sur le chemin parcouru entre deux points quelconques ne dépend pas de la forme du chemin, mais seulement de la position des points, est dit *conservatif*, et les forces elles-mêmes sont dites *conservatives*.

Si cette condition n'est pas observée, le champ de forces n'est pas conservatif, et les forces du champ sont dites non conservatives. Parmi ces dernières il y a, par exemple, la force de frottement (dans le cas général le travail de cette force dépend du chemin parcouru).

Un exemple de champs de forces stationnaires dont l'un est conservatif et l'autre ne l'est pas est donné par le problème 3.2.

Montrons que *dans un champ conservatif le travail des forces du champ sur un chemin parcouru fermé quelconque est nul.* En effet, tout chemin fermé (fig. 41) peut être divisé arbitrairement en deux parties: *1a2* et *2b1*. Le champ étant conservatif, par condition $A_{12}^{(a)} = A_{12}^{(b)}$. D'autre part, il est clair que $A_{12}^{(b)} = -A_{21}^{(b)}$. Donc

$$A_{12}^{(a)} + A_{21}^{(b)} = A_{12}^{(a)} - A_{12}^{(b)} = 0,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Inversement, si sur un chemin fermé quelconque le travail des forces du champ est nul, entre les points *1* et *2* arbitraires ce travail ne dépend pas de la forme du chemin, c'est-à-dire le champ est conservatif. Pour le démontrer, prenons deux chemins arbitraires *1a2* et *1b2* (fig. 41). Utilisons-les pour composer un chemin fermé *1a2b1*. Par condition, le travail sur ce chemin fermé est nul, c'est-à-dire $A_{12}^{(a)} + A_{21}^{(b)} = 0$. On en tire $A_{12}^{(a)} = -A_{21}^{(b)}$. Mais $A_{21}^{(b)} = -A_{12}^{(b)}$, donc

$$A_{12}^{(a)} = A_{12}^{(b)}.$$

De cette façon, l'égalité à zéro du travail des forces d'un champ sur un chemin fermé quelconque est une condition nécessaire et

suffisante de l'indépendance du travail par rapport à la forme du chemin, et peut être considérée comme indice distinctif de tout champ de forces conservatif.

Champ de forces centrales. Tout champ de forces est produit par l'action des corps déterminés. La force qui dans un tel champ agit sur une particule A est conditionnée par l'interaction de cette particule avec les corps considérés. Les forces qui dépendent seulement de la distance entre les particules en interaction et qui sont dirigées suivant la droite reliant ces particules sont dites *centrales*. Un exemple peut en être fourni par les forces de gravitation, coulombiennes et élastiques.

La force centrale qui agit sur la particule A de la part de la particule B peut s'écrire sous la forme générale

$$\mathbf{F} = f(r)\,\mathbf{e}_r, \tag{3.8}$$

où $f(r)$ est la fonction dépendant pour le type d'interaction donné seulement de r, distance entre les particules; $\mathbf{e}_r$, le vecteur unité qui donne la direction du rayon vecteur de A par rapport à B (fig. 42).

Montrons que *tout champ stationnaire de forces centrales est un champ conservatif.*

A cet effet trouvons d'abord le travail de forces centrales pour le cas du champ de forces dû à la présence d'une seule particule fixe B. Le travail élémentaire de la force (3.8) lors du déplacement $d\mathbf{r}$ est $\delta A = \mathbf{F}\,d\mathbf{r} = f(r)\,\mathbf{e}_r\,d\mathbf{r}$. Puisque $\mathbf{e}_r\,d\mathbf{r} = dr$ est la projection du vecteur $d\mathbf{r}$ sur le vecteur $\mathbf{e}_r$ ou sur le rayon vecteur correspondant $\mathbf{r}$ (fig. 42), il vient $\delta A = f(r)\,dr$. Le travail de cette force-là sur le chemin arbitraire du point *1* au point *2*

$$A_{12} = \int_1^2 f(r)\,dr.$$

L'expression obtenue dépend évidemment seulement de la forme de la fonction $f(r)$, c'est-à-dire de l'allure des interactions, et des valeurs de r_1 et r_2 qui sont les distances initiale et finale entre les particules M et N. Elle ne dépend d'aucune façon de la forme du chemin. Or, cela signifie que le champ de forces donné est conservatif.

Généralisons le résultat obtenu au champ de forces stationnaire, dû à la présence d'un ensemble des particules fixes qui agissent sur la particule A avec les forces $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, . . . dont chacune est centrale. Dans ce cas le travail de la résultante lors du déplacement de la particule A d'un point à l'autre est égal à la somme algébrique des travaux des forces isolées. Le travail de chacune de ces forces ne dépendant pas de la forme du chemin, le travail de la résultante ne dépend pas non plus de sa forme.

Ainsi, tout champ stationnaire de forces centrales est conservatif.

Energie potentielle d'une particule dans un champ. Le fait que le travail des forces d'un champ conservatif ne dépend que des positions initiale et finale d'une particule, permet d'introduire la notion très importante de l'énergie potentielle.

Imaginons que dans un champ de forces conservatif une particule se déplace à partir des points différents P_i vers le point fixé O.

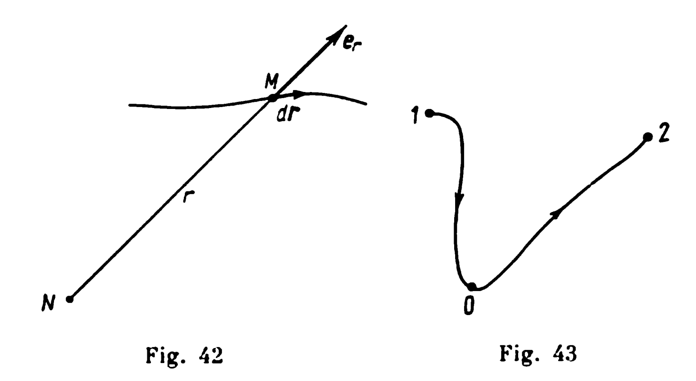


Fig. 42 Fig. 43

Le travail des forces du champ ne dépendant pas de la forme du chemin, il dépend uniquement de la position du point P (le point O étant fixé). Or, cela signifie que le travail donné sera une certaine fonction du rayon vecteur **r** du point P.

En notant cette fonction U (**r**) écrivons

$$A_{PO}=\int_P^O \mathbf{F}\, d\mathbf{r}=U(\mathbf{r}). \qquad (3.9)$$

La fonction U (**r**) se nomme *énergie potentielle* d'une particule dans un champ donné.

Maintenant cherchons le travail des forces d'un champ lors du déplacement d'une particule du point *1* au point *2* (fig. 43). Le travail ne dépendant pas du chemin, choisissons le chemin qui passe par O. Alors, le travail sur le chemin *1O2* peut être mis sous la forme

$$A_{12} = A_{1O} + A_{O2} = A_{1O} - A_{2O},$$

ou, compte tenu de (3.9),

$$\boxed{A_{12}=\int_1^2 \mathbf{F}\, d\mathbf{r}=U_1-U_2.} \qquad (3.10)$$

Le deuxième membre de cette expression est la *décroissance* * de l'énergie potentielle, c'est-à-dire la différence entre l'énergie potentielle d'une particule au point initial et au point final du chemin.

Ainsi, *le travail des forces d'un champ sur le chemin 1-2 est égal à la décroissance de l'énergie potentielle d'une particule dans le champ donné.*

Il est manifeste qu'à la particule se trouvant au point O du champ on peut toujours attribuer une valeur quelconque de l'énergie potentielle choisie à l'avance. Ceci s'explique par le fait qu'en mesurant le travail on ne peut déterminer que la différence des énergies potentielles de deux points et non pas sa valeur absolue. Pourtant, dès que l'énergie potentielle est fixée en un point quelconque, ses valeurs en tous les autres points du champ sont définies sans ambiguïté par la formule (3.10).

La formule (3.10) permet de trouver l'expression de $U(\mathbf{r})$ pour un champ de forces conservatif quelconque. A cet effet il suffit de calculer le travail effectué par les forces du champ sur un chemin quelconque entre deux points, et le mettre sous la forme de décroissance d'une certaine fonction qui est précisément l'énergie potentielle $U(\mathbf{r})$.

C'est ce qui a été justement fait en calculant le travail dans le champ de forces élastique et de gravitation (coulombienne), ainsi que dans le champ de pesanteur homogène [cf. formules (3.3)-(3.5)]. Ces formules montrent que l'énergie potentielle d'une particule dans des champs de forces donnés est de la forme:

1) dans le champ d'une force élastique

$$U(r) = \varkappa r^2/2; \qquad (3.11)$$

2) dans le champ d'une masse ponctuelle (charge)

$$U(r) = \alpha/r; \qquad (3.12)$$

où $\alpha = \begin{cases} -\gamma m_1 m_2 & \text{est l'interaction gravitationnelle;} \\ kq_1q_2, & \text{l'interaction coulombienne;} \end{cases}$

3) dans le champ de pesanteur homogène

$$U(z) = mgz. \qquad (3.13)$$

* La variation d'une grandeur X quelconque peut être définie par son *accroissement* ou sa *décroissance*. On appelle accroissement de la grandeur X la différence entre ses valeurs finale (X_2) et initiale (X_1):

$$\text{accroissement } \Delta X = X_2 - X_1.$$

On appelle décroissance de la grandeur X la différence entre ses valeurs initiale (X_1) et finale (X_2):

$$\text{décroissance } X_1 - X_2 = -\Delta X,$$

c'est-à-dire la décroissance de la grandeur X est égale à son accroissement pris avec le signe opposé.

L'accroissement et la décroissance sont des grandeurs *algébriques*: si $X_2 > X_1$, l'accroissement est positif et la décroissance négative, et inversement.

Soulignons encore une fois que la force potentielle U est une fonction déterminée à une certaine constante arbitraire près. Cette circonstance, pourtant, n'a aucune importance, puisque dans toutes les formules figure seulement la différence des valeurs de U en deux positions de la particule. Ceci fait que la constante arbitraire qui est la même pour tous les points du champ disparaît. Aussi l'omet-on dans les cas courants, ce qui a été le fait des trois expressions précédentes.

Encore une circonstance importante. L'énergie potentielle doit être rapportée non pas à une particule, mais au système de la particule et des corps qui interagissent avec elle et qui provoquent le champ de forces. Pour le caractère d'interaction donné, l'énergie potentielle d'interaction de la particule et des corps considérés dépend uniquement de la position de la particule par rapport à ces corps.

Energie potentielle et force d'un champ. L'interaction d'une particule et des corps qui l'environnent peut être décrite de deux façons, à l'aide des forces et à l'aide de l'énergie potentielle. En mécanique classique les deux modes s'emploient aussi largement. Toutefois, le premier est d'un caractère quelque peu plus général, étant applicable aux forces qui n'autorisent pas l'application de la notion d'énergie potentielle (par exemple, les forces de frottement). Quant au deuxième mode, on ne l'utilise que dans le cas des forces conservatives.

Notre tâche est d'établir la relation entre l'énergie potentielle et la force d'un champ, plus précisément, de déterminer le champ de forces $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ d'après l'énergie potentielle donnée $U(\mathbf{r})$ comme fonction de la position d'une particule dans un champ.

Nous savons déjà que lors du déplacement d'une particule d'un point du champ conservatif en un autre, le travail qu'effectuent les forces du champ peut être présenté comme la *décroissance* de l'énergie potentielle, c'est-à-dire $A_{12} = U_1 - U_2 = -\Delta U$. Ceci se rapporte également au déplacement élémentaire $d\mathbf{r}$, plus précisément à $\delta A = -dU$, ou

$$\mathbf{F}\, d\mathbf{r} = -dU. \tag{3.14}$$

Tenant compte [cf. formule (3.1)] que $\mathbf{F}\, d\mathbf{r} = F_s\, ds$, où $ds = |d\mathbf{r}|$ est le chemin élémentaire; F_s, la projection du vecteur $\mathbf{F}$ sur le déplacement $d\mathbf{r}$, récrivons l'équation (3.14) sous la forme

$$F_s\, ds = -dU,$$

où $-dU$ est la décroissance de l'énergie potentielle *dans la direction du déplacement* $d\mathbf{r}$. On en tire

$$F_s = -\partial U/\partial s, \tag{3.15}$$

c'est-à-dire la projection de la force du champ (vecteur $\mathbf{F}$) en point donné sur la direction du déplacement $d\mathbf{r}$ est égale à la dérivée

de l'énergie potentielle U par rapport à la direction donnée, prise avec le signe opposé. Le symbole $\partial/\partial s$ de la dérivée *partielle* souligne que la dérivée se calcule suivant une direction *déterminée.*

Le déplacement $d\mathbf{r}$ peut être pris dans une direction quelconque, en particulier, le long des coordonnées x, y, z. Si le déplacement $d\mathbf{r}$ est, par exemple, parallèle à l'axe des x, on peut le mettre sous la forme: $d\mathbf{r} = \mathbf{i}\, dx$, où $\mathbf{i}$ est le vecteur unité de l'axe des x; dx, l'accroissement de la coordonnée x. Alors, le travail de la force $\mathbf{F}$ lors du déplacement $d\mathbf{r}$ parallèle à l'axe des x

$$\mathbf{F}\, d\mathbf{r} = \mathbf{Fi}\, dx = F_x\, dx,$$

où F_x est la projection du vecteur $\mathbf{F}$ sur le vecteur unité $\mathbf{i}$ (et non sur le déplacement $d\mathbf{r}$, comme c'est le cas de F_s).

En portant cette dernière expression dans l'équation (3.14) on obtient

$$F_x = -\partial U/\partial x,$$

où le symbole de la dérivée partielle signifie que lors de la dérivation, $U(x, y, z)$ doit être envisagée comme fonction de l'argument de x, les autres arguments devant dans ces conditions rester constants. Il est clair que pour les projections F_y et F_z les équations sont analogues à celles de F_x.

Ainsi, en prenant les dérivées partielles de la fonction U par rapport à x, y, z avec des signes opposés nous trouvons les projections F_x, F_y, F_z du vecteur $\mathbf{F}$ sur les vecteurs unités $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$. On en déduit aisément le vecteur lui-même: $\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}$, ou

$$\mathbf{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{k}\right).$$

La grandeur entre parenthèses s'appelle *gradient de la fonction scalaire* U notée grad U ou ∇U. Nous utiliserons la deuxième notation qui est plus commode et où ∇ désigne le vecteur symbolique ou l'opérateur

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}.$$

C'est pourquoi ∇U peut être formellement considéré comme produit du vecteur symbolique ∇ par le scalaire U.

De la sorte, la relation entre la force d'un champ et l'énergie potentielle en tant que fonction des coordonnées peut être présentée sous la forme compacte suivante:

$$\boxed{\mathbf{F} = -\nabla U,} \tag{3.16}$$

c'est-à-dire *la force d'un champ* $\mathbf{F}$ *est égale au gradient de l'énergie potentielle pris avec le signe moins* de la particule en point donné du champ. Si on connait la fonction $U(\mathbf{r})$ la dernière formule permet de rétablir le champ de forces $\mathbf{F}(\mathbf{r})$.

Exemple. Dans un certain champ l'énergie potentielle d'une particule est de la forme

a) $U(x, y) = -\alpha xy$, où α est une constante;

b) $U(\mathbf{r}) = \mathbf{ar}$, où $\mathbf{a}$ est un vecteur constant; $\mathbf{r}$, le rayon vecteur d'un point du champ.

Déterminons le champ de forces relatif à chacun des cas:

a) $\mathbf{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{j}\right) = \alpha(y\mathbf{i} + x\mathbf{j})$;

b) mettons d'abord la fonction U sous la forme $U = a_x x + a_y y + a_z z$; il vient

$$\mathbf{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{k}\right) = -(a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}) = -\mathbf{a}.$$

Le sens du gradient devient plus direct, plus clair si on introduit la notion de *surface équipotentielle*, surface en tous les points de laquelle l'énergie potentielle U est de la même valeur. Il est clair qu'à chaque valeur de U correspond sa propre surface équipotentielle.

La formule (3.15) entraîne que la projection du vecteur $\mathbf{F}$ sur une direction quelconque, tangente à la surface équipotentielle en point donné, est nulle. Cela signifie qu'en point donné le vecteur $\mathbf{F}$ est normal à la surface équipotentielle. Prenons ensuite le déplacement ∂s dans la direction de la décroissance de U; alors, $\partial U < 0$ et d'après (3.15), $F_s > 0$, c'est-à-dire le vecteur $\mathbf{F}$ est dirigé dans le sens de diminution de U. Vu que $\mathbf{F}$ est opposé à la direction du vecteur ∇U, nous en tirons la conclusion suivante: *le gradient U est un vecteur dirigé suivant la normale à une surface équipotentielle dans la direction de l'augmentation de l'énergie potentielle U.*

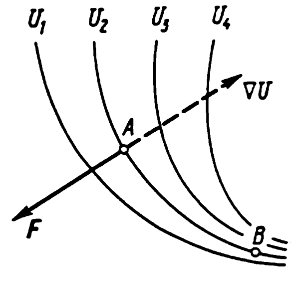


Fig. 44

Ce qui vient d'être dit est illustré par la figure 44 qui se rapporte au cas bidimensionnel. Elle représente le système d'équipotentiels ($U_1 < U_2 < U_3 < U_4$), ainsi que le gradient de l'énergie potentielle ∇U et le vecteur correspondant de la force $\mathbf{F}$ au point A du champ. La question suivante n'est pas sans intérêt: quelles seront les vecteurs de ces deux grandeurs, par exemple, au point B du champ donné?

A titre de conclusion notons qu'il existe non seulement le gradient de la fonction U, mais le gradient de toute autre fonction scalaire des coordonnées. La notion de gradient est largement utilisée dans les branches les plus diverses de la physique.

Notion du champ. L'expérience montre que dans le cas des interactions gravitationnelles et électrostatiques, la force $\mathbf{F}$ qui agit sur la particule A de la part des corps qui l'entourent (du système B) est proportionnelle à la masse (ou à la charge) de la particule A.

En d'autres termes, la force **F** peut être représentée sous la forme de produit de deux grandeurs:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{G}, \tag{3.17}$$

où m est la masse (ou la charge) de la particule A ; **G**, un certain vecteur dépendant aussi bien de la position de la particule A que des propriétés des corps qui l'entourent (du système B).

Ceci rend possible une autre interprétation physique de l'interaction, interprétation liée à la notion du champ: dans ce cas on dit que le système B crée dans l'espace environnant un *champ* caractérisé par le vecteur $\mathbf{G}(\mathbf{r})$. Ou, autrement dit, on admet qu'en chaque point de l'espace le système B, source du champ, crée des conditions telles (vecteur **G**) que la particule placée en ces points subit l'action de la force (3.17). De plus, on considère que le champ (le vecteur **G**) existe indépendamment de la présence ou de l'absence dans ce champ de la particule A *.

Le vecteur **G** s'appelle *intensité du champ.*

L'une des propriétés importantes des champs est qu'un champ formé par plusieurs sources est égal à la somme des champs créés par chacune d'elles. Plus précisément, l'intensité **G** du champ résultant en un point arbitraire

$$\mathbf{G} = \sum \mathbf{G}_i, \tag{3.18}$$

où $\mathbf{G}_i$ est l'intensité du champ de l'i-ième source en ce même point. Cette formule traduit ce qu'on appelle le *principe de superposition* des champs.

Considérons maintenant l'énergie potentielle d'une particule. D'après (3.17), la formule (3.14) peut s'écrire: $m\mathbf{G}\,d\mathbf{r} = -dU$. En divisant les deux membres par m et en introduisant la notation $U/m = \varphi$, on obtient

$$\mathbf{G}\,d\mathbf{r} = -d\varphi, \tag{3.19}$$

ou

$$\int_1^2 \mathbf{G}\,d\mathbf{r} = \varphi_1 - \varphi_2. \tag{3.20}$$

La fonction $\varphi(\mathbf{r})$ s'appelle *potentiel du champ* en point de rayon vecteur **r**.

La formule (3.20) permet de déterminer le potentiel des champs gravitationnel et électrostatique quelconques. A cet effet il suffit de calculer l'intégrale $\int \mathbf{G}\,d\mathbf{r}$ sur un chemin arbitraire entre les points *1* et *2* et mettre ensuite l'expression obtenue sous la forme de

* Tant que nous demeurons dans le cadre de la statique, la notion de champ peut être envisagée comme purement conventionnelle (formelle), introduite seulement pour la commodité de la description des phénomènes. Pourtant, lors du passage aux champs variables, il devient clair que cette notion a un sens physique profond: *le champ est une réalité physique.*

décroissance d'une certaine fonction qui est justement le potentiel $\varphi(\mathbf{r})$. Ainsi, les potentiels du champ de gravitation d'une masse ponctuelle m et du champ coulombien d'une charge ponctuelle q se déterminent d'après (3.12) par les formules:

$$\varphi_{grav} = -\gamma m/r; \quad \varphi_{coul} = kq/r. \tag{3.21}$$

Notons que le potentiel φ, tout comme l'énergie potentielle, peut être défini seulement à une certaine constante arbitraire près, qui est également négligeable. Donc, dans les cas courants on l'omet.

Ainsi, un champ peut être décrit soit sous une forme vectorielle $\mathbf{G}(\mathbf{r})$, soit sous une forme scalaire $\varphi(\mathbf{r})$. Les deux modes sont adéquats, mais dans la pratique il s'avère que dans la plupart des cas le deuxième (à l'aide du potentiel φ) est nettement plus commode et voici pourquoi.

1. En connaissant $\varphi(\mathbf{r})$ on peut calculer l'énergie potentielle U et le travail des forces du champ A:

$$U = m\varphi; \quad A_{12} = m(\varphi_1 - \varphi_2). \tag{3.22}$$

2. Au lieu des trois composantes de la fonction vectorielle $\mathbf{G}(\mathbf{r})$ il est plus simple de donner la fonction scalaire $\varphi(\mathbf{r})$.

3. Lorsque le champ est formé par de nombreuses sources, il est plus facile de calculer le potentiel φ que le vecteur $\mathbf{G}$; les potentiels sont des scalaires et on peut les additionner sans se soucier de la direction des forces. En effet, d'après (3.18) et (3.19) $\mathbf{G}\,d\mathbf{r} = \sum(\mathbf{G}_i\,d\mathbf{r}) = -\sum d\varphi_i = -d\sum\varphi_i = -d\varphi$, c'est-à-dire

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum\varphi_i(\mathbf{r}), \tag{3.23}$$

où φ_i est le potentiel produit par l'i-ième particule en point donné du champ.

4. Enfin, en connaissant la fonction $\varphi(\mathbf{r})$ on peut rétablir aisément le champ $\mathbf{G}(\mathbf{r})$ en tant qu'antigradient du potentiel φ:

$$\mathbf{G} = -\nabla\varphi. \tag{3.24}$$

Cette formule est immédiate d'après (3.16).

A titre de conclusion examinons un exemple de calcul du potentiel du champ de forces centrifuges.

Exemple. Calculons l'intensité $\mathbf{G}$ et le potentiel φ_{cf} du champ de forces centrifuges dans un référentiel qui tourne autour d'un axe fixe à une vitesse angulaire constante ω.

L'intensité $\mathbf{G} = \mathbf{F}_{cf}/m = \omega^2\boldsymbol{\rho}$, où $\boldsymbol{\rho}$ est le rayon vecteur du point du champ par rapport à l'axe de rotation.

Maintenant calculons d'après (3.20) l'intégrale en $\mathbf{G}$ sur le chemin parcouru du point *1* au point *2*

$$\int_1^2 \mathbf{G}\,d\mathbf{r} = \omega^2 \int_1^2 \boldsymbol{\rho}\,d\mathbf{r} = \omega^2 \int_1^2 \rho\,d\rho = \omega^2(\rho_2^2 - \rho_1^2)/2.$$

On voit que cette intégrale ne dépend pas de la forme du chemin entre *1* et *2*, mais dépend seulement de la position de ces points. Cela signifie que le champ de forces considéré est un champ conservatif.

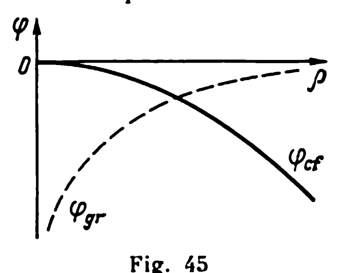


Fig. 45

La comparaison du résultat obtenu avec (3.20) entraîne que

$$\varphi_{cf} = -\omega^2\rho^2/2. \tag{3.25}$$

La figure 45 représente la diagramme de la relation entre φ_{cf} et la distance ρ à l'axe de rotation, ainsi que, à titre de comparaison, le diagramme du potentiel $\varphi_{grav}(\rho)$ du champ gravitationnel de la masse ponctuelle qui se trouve en $\rho = 0$.

§ 3.4. Energie mécanique d'une particule dans un champ

Énergie cinétique. Supposons qu'une particule de masse m se déplace sous l'action d'une certaine force $\mathbf{F}$ (dans le cas général, la force $\mathbf{F}$ peut être une résultante de plusieurs forces). Calculons le travail élémentaire qu'effectue cette force lors du déplacement élémentaire $d\mathbf{r}$. En tenant compte que $\mathbf{F} = m\,d\mathbf{v}/dt$ et $d\mathbf{r} = \mathbf{v}\,dt$, écrivons

$$\delta A = \mathbf{F}\,d\mathbf{r} = m\mathbf{v}\,d\mathbf{v}.$$

Le produit scalaire $\mathbf{v}\,d\mathbf{v} = v\,(d\mathbf{v})_\mathbf{v}$, où $(d\mathbf{v})_\mathbf{v}$ est la projection du vecteur $d\mathbf{v}$ sur la direction du vecteur $\mathbf{v}$. Cette projection est égale à dv qui est l'accroissement du module du vecteur vitesse. Donc, $\mathbf{v}\,d\mathbf{v} = v\,dv$ et le travail élémentaire

$$\delta A = mv\,dv = d\,(mv^2/2).$$

Il est donc clair que le travail de la résultante $\mathbf{F}$ est absorbé par l'accroissement d'une certaine grandeur (entre parenthèses) qu'on appelle *énergie cinétique*:

$$\boxed{T = mv^2/2.} \tag{3.26}$$

Ainsi, lors du déplacement élémentaire l'accroissement de l'énergie cinétique d'une particule s'écrit

$$dT = \delta A, \tag{3.27}$$

et lors du déplacement total de *1* en *2*

$$\boxed{T_2 - T_1 = A_{12},} \tag{3.28}$$

c'est-à-dire *lors d'un certain déplacement l'accroissement de l'énergie cinétique d'une particule est égal à la somme algébrique des travaux de toutes les forces* appliquées à la particule lors de ce même déplacement. Si $A_{12} > 0$, $T_2 > T_1$, c'est-à-dire l'énergie cinétique de la particule augmente; mais si $A_{12} < 0$, l'énergie cinétique de la particule diminue.

L'équation (3.27) peut également être mise sous une autre forme en divisant ses deux membres par l'intervalle de temps dt correspondant

$$\boxed{dT/dt = \mathbf{F}\mathbf{v} = N.} \tag{3.29}$$

Cela signifie que la dérivée de l'énergie cinétique d'une particule par rapport au temps est égale à la puissance N de la résultante **F** qui agit sur la particule.

Les équations (3.28) et (3.29) sont vraies dans des systèmes galiléens et non galiléens. Dans ces derniers, en plus des forces qui agissent sur la particule de la part des corps quelconques (forces d'interaction), il faut encore tenir compte des forces d'inertie. C'est pourquoi dans ces équations par travail (puissance) il faut entendre la somme algébrique des travaux (puissances) aussi bien des forces d'interaction que des forces d'inertie.

Energie mécanique totale d'une particule. D'après (3.27) l'accroissement de l'énergie cinétique d'une particule est égal au travail élémentaire de la résultante **F** de toutes les forces appliquées. Quelles sont ces forces? Si la particule se trouve dans le champ conservatif qui nous intéresse, elle subit l'action de la force conservative $\mathbf{F}_c$ de la part de ce champ. Par ailleurs, d'autres forces encore d'origine différente peuvent agir sur la particule. Appelons-les *forces étrangères* $\mathbf{F}_{ét}$.

De la sorte, la résultante **F** de toutes les forces agissant sur une particule peut être mise sous la forme $\mathbf{F} = \mathbf{F}_c + \mathbf{F}_{ét}$. Le travail de ces forces est absorbé par l'accroissement de l'énergie cinétique de la particule

$$dT = \delta A_c + \delta A_{ét}.$$

D'après (3.14) le travail des forces d'un champ est égal à la décroissance de l'énergie potentielle d'une particule, c'est-à-dire $\delta A_c = -dU$. En portant cette expression dans la précédente et le terme dU dans le premier membre, on obtient

$$dT + dU = d(T + U) = \delta A_{ét}.$$

Il est clair que le travail des forces étrangères est absorbé par l'accroissement de la grandeur $T + U$. Cette grandeur, somme des énergies cinétique et potentielle, s'appelle *énergie mécanique totale d'une particule dans un champ*:

$$\boxed{E = T + U.} \tag{3.30}$$

Notons que l'énergie mécanique totale E, tout aussi bien que l'énergie potentielle, est déterminée à une constante arbitraire négligeable près.

De la sorte, lors du déplacement élémentaire, l'accroissement de l'énergie mécanique totale d'une particule est égal à

$$dE = \delta A_{\text{ét}}, \tag{3.31}$$

et lors du déplacement total du point *1* au point *2*

$$\boxed{E_2 - E_1 = A_{\text{ét}},} \tag{3.32}$$

c'est-à-dire *sur un certain chemin, l'accroissement de l'énergie mécanique totale d'une particule est égal à la somme algébrique des travaux de toutes les forces étrangères* appliquées à la particule sur ce même chemin. Si $A_{\text{ét}} > 0$, l'énergie mécanique totale d'une particule augmente, et si $A_{\text{ét}} < 0$, elle diminue.

Exemple. D'un escarpement d'une hauteur h au-dessus d'un lac un corps de masse m est jeté à la vitesse v_0. Calculer le travail des forces de résistance de l'air, si le corps est tombé à la surface de l'eau à la vitesse v.

Si on envisage le mouvement du corps dans le champ de pesanteur de la Terre, la résistance de l'air sera une force étrangère et d'après l'équation (3.32), le travail cherché $A_{\text{rés}} = E_2 - E_1 = mv^2/2 - (mv_0^2 + mgh)$, ou

$$A_{\text{rés}} = m(v^2 - v_0^2)/2 - mgh.$$

La grandeur obtenue peut s'avérer non seulement négative, mais aussi positive (cela dépend, par exemple, de l'action du vent au cours de la chute du corps).

L'équation (3.31) peut s'écrire également sous une autre forme, si on divise ses deux membres par dt. Il vient

$$\boxed{dE/dt = \mathbf{F}_{\text{ét}}\mathbf{v}.} \tag{3.33}$$

Cela signifie que la dérivée de l'énergie mécanique totale d'une particule par rapport au temps est égale à la puissance de la résultante de toutes les forces étrangères appliquées à la particule.

Résumons : nous avons établi que l'énergie mécanique totale d'une particule ne peut changer que sous l'action des forces étrangères. On en tire directement la *loi de conservation* de l'énergie mécanique totale d'une particule dans un champ extérieur :

si les forces étrangères sont absentes ou la somme algébrique de leurs puissances est nulle pendant le temps qui nous intéresse, pendant ce temps l'énergie mécanique totale d'une particule reste constante. Autrement dit

$$E = T + U = \text{const},$$

ou

$$\boxed{mv^2/2 + U(\mathbf{r}) = \text{const.}} \qquad (3.34)$$

Même sous cette forme la plus simple la loi de conservation donnée permet déjà de résoudre assez facilement plusieurs problèmes importants sans recourir aux équations du mouvement, ce qui impose souvent, comme nous le savons, des calculs lourds et fatigants. C'est cette circonstance, précisément qui fait des lois de conservation un outil si efficace de la recherche.

Illustrons sur l'exemple suivant les possibilités et les avantages que présente la loi de conservation (3.34).

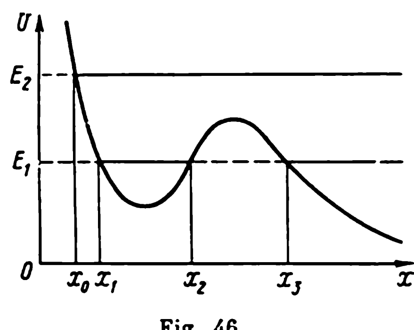


Fig. 46

Exemple. Supposons qu'une particule se déplace dans un champ conservatif unidimensionnel $U(x)$ visualisé sur la figure 46. Si les forces étrangères sont absentes, dans ce champ l'énergie mécanique totale de la particule, c'est-à dire E, ne change pas au cours du mouvement, et nous pouvons trouver une solution simple des problèmes suivants:

1. Sans résoudre l'équation fondamentale de la dynamique déterminer $v(x)$, vitesse de la particule en fonction de ses coordonnées. A cet effet il suffit de connaître, d'après l'équation (3.34), la forme concrète de la *courbe potentielle* $U(x)$ et la valeur de l'énergie totale E (deuxième membre de l'équation donnée).

2. Etablir le *domaine de variation de la coordonnée* x d'une particule dans lequel elle peut se trouver pour la valeur donnée de l'énergie totale E. Il est clair qu'une particule ne peut pas pénétrer dans le domaine $U > E$, puisque son énergie potentielle U ne peut pas dépasser son énergie totale. Il s'ensuit tout de suite qu'avec $E = E_1$ (fig. 46) la particule peut se déplacer entre les coordonnées x_1 et x_2 (osciller) ou à droite de la coordonnée x_3. Mais elle ne peut pas passer du premier domaine dans le deuxième et vice versa, ces derniers étant séparés par la *barrière de potentiel*. Notons que lorsqu'une particule se déplace dans un domaine limité du champ, on dit qu'elle est fermée dans un *puits de potentiel* (dans notre cas entre x_1 et x_2).

Avec $E = E_2$ (fig. 46) le comportement de la particule est différent: elle peut se déplacer dans tout le domaine à droite de x_0 Si à l'instant initial la particule se trouve en x_0, par la suite elle se déplacera à droite. Le lecteur pourra établir lui-même avec profit comment changera dans ces conditions l'énergie cinétique en fonction de sa position x.

§ 3.5. Loi de conservation de l'énergie

Jusque-là nous nous sommes bornés à l'observation du comportement d'*une* particule du point de vue énergétique. Maintenant passons à un *système de particules*. Ce dernier peut être un corps quelconque, le gaz, n'importe quel mécanisme, le Système solaire, etc.

Dans le cas général, les particules d'un système peuvent interagir aussi bien entre elles qu'avec des corps ne faisant pas partie du système. Un système de particules qui ne subit l'action d'aucuns corps étrangers (ou si leur action est négligeable) est dit *fermé* (ou isolé). La notion d'un système fermé qui est une généralisation naturelle de la notion du point matériel isolé joue en physique un rôle important.

Energie potentielle. Examinons un système fermé dont les particules sont sollicitées seulement par des forces centrales, c'est-à-dire des forces qui, pour le caractère des interactions donné, dépendent seulement de la distance entre les particules et sont dirigées suivant la droite qui les relie.

Montrons que dans tout référentiel lors du passage d'un système d'une position en une autre, le travail de toutes ces forces peut être présenté comme la décroissance d'une certaine fonction ne dépendant, pour le caractère des interactions donné, que de la configuration du système lui-même ou de la disposition relative de ses particules. Appelons cette fonction énergie potentielle *propre* du système (à la différence de l'énergie potentielle qui caractérise l'interaction du système donné avec d'autres corps).

Prenons d'abord le système de deux particules, 1 et 2. Calculons la somme algébrique des travaux élémentaires des forces $\mathbf{F}_1$ et $\mathbf{F}_2$ avec lesquelles ces particules interagissent entre elles. Supposons que dans un référentiel arbitraire K les particules effectuent en un temps dt des déplacements $d\mathbf{r}_1$ et $d\mathbf{r}_2$. Alors le travail global correspondant de ces forces

$$\delta A_{1,2} = \mathbf{F}_1 d\mathbf{r}_1 + \mathbf{F}_2 d\mathbf{r}_2.$$

En tenant compte que $\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1$ (d'après la troisième loi de Newton), écrivons l'équation précédente comme suit:

$$\delta A_{1,2} = \mathbf{F}_1 (d\mathbf{r}_1 - d\mathbf{r}_2).$$

La grandeur entre parenthèses n'est rien d'autre que le déplacement de la particule 1 par rapport à la particule 2. Plus précisément, c'est le déplacement de la particule 1 dans le référentiel K' lié invariablement à la particule 2 et se déplaçant avec elle en translation par rapport au référentiel initial K. En effet, le déplacement $d\mathbf{r}_1$ de la particule 1 dans le référentiel K peut être représenté comme le déplacement $d\mathbf{r}_2$ du référentiel K' (lié à la particule 2) plus le déplacement $d\mathbf{r}'_1$ de la particule 1 par rapport à K': $d\mathbf{r}_1 = d\mathbf{r}_2 + d\mathbf{r}'_1$. On en tire $d\mathbf{r}_1 - d\mathbf{r}_2 = d\mathbf{r}'_1$ et

$$\delta A_{1,2} = \mathbf{F}_1 d\mathbf{r}'_1.$$

Le résultat ainsi obtenu est remarquable: la somme algébrique des travaux élémentaires d'une paire de forces d'interaction dans un référentiel arbitraire K s'avère toujours égale au travail élé-

mentaire qu'effectue une force qui agit sur une particule dans le référentiel, où l'autre particule est au repos. Autrement dit, le travail $\delta A_{1,2}$ ne dépend pas du choix du référentiel initial K.

La force $\mathbf{F}_1$ qui agit sur la particule 1 de la part de la particule 2 est une force conservative dans le référentiel K' lié à la particule 2. C'est pourquoi le travail de la force considéré absorbé par le déplacement $d\mathbf{r}'_1$ peut être présenté d'après (3.10) comme la décroissance de l'énergie potentielle de la particule 1 dans le champ de la particule 2, ou comme la décroissance de l'énergie potentielle d'interaction de la paire des particules considérées

$$\delta A_{1,2} = -dU_{12},$$

où U_{12} est la fonction qui ne dépend que de la distance entre ces particules.

Considérons maintenant un système de trois particules (le résultat obtenu dans ce cas se généralise facilement au système d'un nombre quelconque de particules). Le travail élémentaire qu'effectuent toutes les forces d'interaction lors du déplacement élémentaire de toutes les particules peut être représenté comme la somme des travaux élémentaires de toutes les trois paires d'interactions, c'est-à-dire $\delta A = \delta A_{1,2} + \delta A_{1,3} + \delta A_{2,3}$. Mais, comme nous l'avons montré, pour chaque paire des interactions $\delta A_{i,k} = -dU_{ik}$; donc

$$\delta A = -d\,(U_{12} + U_{13} + U_{23}) = -dU,$$

où la fonction U est *l'énergie potentielle propre* du système de particules donné:

$$U = U_{12} + U_{13} + U_{23}.$$

Chaque terme de cette somme dépendant de la distance entre les particules correspondantes, il est clair que l'énergie potentielle propre U du système considéré dépend de la position relative des particules (au même instant) ou, autrement dit, de la configuration du système.

Il est clair que de tels raisonnements sont également justifiés pour un système d'un nombre arbitraire de particules. On peut donc affirmer qu'*à chaque configuration d'un système de particules arbitraire correspond sa valeur de l'énergie potentielle propre U et lors de la variation de cette configuration le travail de toutes les forces centrales intérieures est égal à la décroissance de cette énergie*, c'est-à-dire

$$\delta A = -dU; \tag{3.35}$$

pour le déplacement total de toutes les particules du système

$$A = U_1 - U_2, \tag{3.36}$$

où U_1 et U_2 sont les valeurs de l'énergie potentielle du système aux états initial et final.

L'énergie potentielle propre U du système est une grandeur *non additive*, c'est-à-dire, dans le cas général, elle n'est pas égale à la somme des énergies potentielles propres de ses parties. Il convient encore de prendre en considération l'énergie potentielle d'interaction U_{in} des parties isolées du système

$$U = \sum U_n + U_{in}, \qquad (3.37)$$

où U_n est l'énergie potentielle propre de la n-ième partie.

Il ne faut pas non plus perdre de vue que l'énergie potentielle propre d'un système, tout comme l'énergie potentielle d'interaction de chaque paire des particules est déterminée à une constante arbitraire près, qui d'ailleurs là aussi est négligeable.

A titre de conclusion voici des formules utiles pour le calcul. Montrons tout d'abord que l'énergie potentielle propre peut être mise sous la forme

$$\boxed{U = {}^1/_2 \sum U_i,} \qquad (3.38)$$

où U_i est l'énergie potentielle d'interaction de l'i-ième particule avec toutes les autres particules du système. La sommation se fait ici sur toutes les particules du système.

Vérifions d'abord la validité de cette formule pour un système de trois particules. Nous avons montré précédemment que l'énergie potentielle propre du système donné $U = U_{12} + U_{13} + U_{23}$. Transformons cette somme de la façon suivante. Mettons chaque terme U_{ik} sous une forme symétrique: $U_{ik} = (U_{ik} + U_{ki})/2$, puisqu'il est clair que $U_{ik} = U_{ki}$. Il vient

$$U = {}^1/_2 (U_{12} + U_{21} + U_{13} + U_{31} + U_{23} + U_{32}).$$

Groupons les termes de même premier indice

$$U = {}^1/_2 [(U_{12} + U_{13}) + (U_{21} + U_{23}) + (U_{31} + U_{32})].$$

Chaque somme entre parenthèses représente l'énergie potentielle U_i d'interaction de l'i-ième particule avec les deux autres. La dernière expression peut donc se récrire comme suit:

$$U = {}^1/_2(U_1 + U_2 + U_3) = {}^1/_2 \sum_{i=1}^{3} U_i,$$

ce qui correspond pleinement à la formule (3.38).

Il est évident que le résultat obtenu est valable pour un système arbitraire puisque de tels raisonnements ne dépendent absolument pas du nombre de particules qui composent le système.

Pour un système dont les particules sont soumises à l'interaction de caractère gravitationnel ou coulombien, la formule (3.38) peut être ramenée à une autre forme en utilisant la notion de potentiel. Remplaçons dans (3.38) l'énergie potentielle de l'i-ième particule

par l'expression $U_i = m_i\varphi_i$, où m_i est la masse (la charge) de l'i-ième particule, et φ_i, le potentiel créé par toutes les autres particules du système au point où se trouve l'i-ième particule. Il vient

$$U = {}^1/_2 \sum m_i\varphi_i. \tag{3.39}$$

Si les masses (les charges) du système sont distribuées d'une façon continue, la sommation se ramène à l'intégration

$$U = {}^1/_2 \int \varphi dm = {}^1/_2 \int \varphi\rho dV, \tag{3.40}$$

où ρ est la densité de la masse (charge) ; dV, un élément de volume. L'intégration se fait ici sur tout le volume occupé par les masses (les charges).

Un exemple d'application de cette formule peut être donné par le problème (3.11) dans lequel on calcule l'énergie potentielle propre de l'interaction gravitationnelle des masses distribuées suivant la surface et le volume d'une sphère.

Energie cinétique. Examinons dans un référentiel un système arbitraire de particules. Supposons que l'i-ième particule du système possède à l'instant donné une énergie cinétique T_i. D'après (3.26) l'accroissement de cette énergie pour chaque particule est égal au travail de toutes les forces dont elle subit l'action: $dT_i = \delta A_i$. Cherchons le travail élémentaire qu'effectuent toutes les forces qui agissent sur toutes les particules du système

$$\delta A = \sum \delta A_i = \sum dT_i = d\sum T_i = dT,$$

où $T = \sum T_i$ est l'énergie cinétique globale du système. Notons que l'énergie cinétique est une grandeur *additive*: elle est égale à la somme des énergies cinétiques des parties isolées d'un système indépendamment du fait si elles interagissent entre elles ou non.

Résumons: *l'accroissement de l'énergie cinétique d'un système est égal au travail effectué par toutes les forces qui agissent sur toutes ses particules.* Lors du déplacement élémentaire de toutes les particules

$$dT = \delta A, \tag{3.41}$$

et lors du déplacement total

$$\boxed{T_2 - T_1 = A.} \tag{3.42}$$

L'équation (3.41) peut être mise également sous une autre forme en divisant ses deux membres par l'intervalle de temps correspondant dt. Tout en tenant compte que $\delta A_i = \mathbf{F}_i\mathbf{v}_i dt$, on obtient

$$\boxed{dT/dt = \sum \mathbf{F}_i\mathbf{v}_i,} \tag{3.43}$$

c'est-à-dire *la dérivée de l'énergie cinétique d'un système par rapport au temps est égale à la puissance globale de toutes les forces qui agissent sur toutes les particules du système.*

Les équations (3.41)-(3.43) sont vraies aussi bien dans des référentiels galiléens que non galiléens. Il convient seulement de retenir que dans des référentiels non galiléens, en plus du travail des forces d'interaction il faut tenir compte du travail des forces d'inertie.

Classification des forces. On sait que les particules d'un système peuvent interagir aussi bien entre elles qu'avec des corps ne faisant pas partie du système considéré. Les forces d'interaction entre les particules du système sont dites alors *intérieures*, et celles dues à l'action d'autres corps, étrangers à ce système, *extérieures*.

D'autre part, toutes les forces sont classées en *potentielles* et *non potentielles*. Les forces potentielles sont celles qui, pour le caractère des interactions donné, ne dépendent que de la configuration du système mécanique. Leur travail, comme nous allons le montrer, est égal à la décroissance de l'énergie potentielle du système.

Aux forces non potentielles on rapporte ce qu'on appelle les forces *dissipatives*, celles de frottement et de résistance. Elles possèdent cette propriété importante que le travail global des forces dissipatives *intérieures* du système considéré est négatif, et ceci quel que soit le référentiel. Démontrons ce fait.

Toute force dissipative peut être mise sous la forme

$$\mathbf{F} = -k(v)\,\mathbf{v}, \tag{3.44}$$

où $\mathbf{v}$ est la vitesse du corps donné par rapport à un autre corps (ou milieu) avec lequel il interagit; $k(v)$, le coefficient positif qui dépend généralement de la vitesse v. La direction de la force $\mathbf{F}$ est toujours opposée au vecteur $\mathbf{v}$. Suivant le choix du référentiel, le travail de cette force peut être aussi bien positif que négatif. *Quant au travail global de toutes les forces dissipatives intérieures, cette grandeur est toujours négative.*

En passant à la démonstration de ce fait, notons avant tout que dans un système les forces dissipatives intérieures se manifestent deux à deux, étant dans chaque paire et d'après la troisième loi de Newton de même module, mais de directions opposées. Calculons le travail élémentaire d'une paire quelconque des forces dissipatives d'interaction entre les corps *1* et *2* dans un référentiel, où les vitesses de ces corps à l'instant donné sont égales à $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$:

$$\delta A^{\text{dis}} = \mathbf{F}_1\mathbf{v}_1 dt + \mathbf{F}_2\mathbf{v}_2 dt.$$

Maintenant tenons compte que $\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1$; $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}$ est la vitesse du corps *1* par rapport au corps *2*, ainsi que $\mathbf{F}_1 = -k(v)\,\mathbf{v}$. Alors, l'expression du travail se transforme comme suit

$$\delta A^{\text{dis}} = \mathbf{F}_1(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)\,dt = -k(v)\,\mathbf{v}\mathbf{v}dt = -k(v)\,v^2 dt.$$

Il est donc clair que le travail d'une paire arbitraire des forces dissipatives d'interaction intérieures est toujours négatif; donc, le travail global de toutes les paires des forces dissipatives intérieures

est également toujours négatif. De la sorte, en effet

$$\boxed{A_{\text{int}}^{\text{dis}} < 0.} \tag{3.45}$$

Loi de conservation de l'énergie. Nous avons montré ci-dessus que l'accroissement de l'énergie cinétique d'un système est égal au travail effectué par *toutes* les forces qui agissent sur *toutes* les particules du système. En divisant ces forces en forces intérieures et extérieures, et ces dernières à leur tour en forces potentielles et dissipatives, écrivons l'affirmation précédente comme suit

$$dt = \delta A_{\text{ext}} + \delta A_{\text{int}} = \delta A_{\text{ext}} + \delta A_{\text{int}}^{\text{pot}} + \delta A_{\text{int}}^{\text{dis}}.$$

Maintenant tenons compte que le travail des forces potentielles intérieures est égal à la décroissance de l'énergie potentielle propre du système, c'est-à-dire $\delta A_{\text{int}}^{\text{pot}} = -dU_{\text{pr}}$. L'expression précédente devient alors

$$dT + dU_{\text{pr}} = \delta A_{\text{ext}} + \delta A_{\text{int}}^{\text{dis}}. \tag{3.46}$$

Introduisons la notion d'*énergie mécanique totale*, ou d'*énergie mécanique* tout court comme la somme des énergies cinétique et potentielle d'un système

$$\boxed{E = T + U_{\text{pr}}.} \tag{3.47}$$

Il est clair que l'énergie E dépend des vitesses de la particule du système, du caractère de l'interaction entre elles et de la configuration du système. D'autre part, l'énergie E, tout aussi bien que l'énergie potentielle U, est déterminée à une constante arbitraire négligeable près et est une grandeur *non additive*, c'est-à-dire dans le cas général l'énergie E d'un système n'est pas égale à la somme des énergies de ses parties isolées. Conformément à (3.37)

$$E = \sum E_n + U_{\text{in}}, \tag{3.48}$$

où E_n est l'énergie mécanique de la n-ième partie d'un système; U_{in}, l'énergie d'interaction de ses parties isolées.

Revenons à la formule (3.46). Compte tenu de (3.47) récrivons-la sous la forme

$$dE = \delta A_{\text{ext}} + \delta A_{\text{int}}^{\text{dis}}. \tag{3.49}$$

Cette expression est vraie pour une variation infinitésimale de la configuration d'un système. Et pour une variation totale

$$\boxed{E_2 - E_1 = A_{\text{ext}} + A_{\text{int}}^{\text{dis}},} \tag{3.50}$$

c'est-à-dire *l'accroissement de l'énergie mécanique d'un système est égal à la somme algébrique des travaux de toutes les forces extérieures et de toutes les forces dissipatives intérieures.*

L'équation (3.49) peut être mise également sous une autre forme en divisant ses deux membres par l'intervalle de temps dt correspondant. Il vient

$$\boxed{dE/dt = N_{\text{ext}} + N_{\text{int}}^{\text{dis}},} \tag{3.51}$$

c'est-à-dire *la dérivée de l'énergie mécanique d'un système par rapport au temps est égale à la somme algébrique des puissances de toutes les forces extérieures et de toutes les forces dissipatives intérieures.*

Les équations (3.49)-(3.51) sont observées aussi bien dans des référentiels galiléens que non galiléens. Il convient seulement de ne pas perdre de vue que dans un référentiel non galiléen il faut également tenir compte du travail (puissance) des forces d'inertie qui jouent le rôle des forces extérieures, c'est-à-dire il faut entendre par A_{ext} la somme algébrique des travaux des forces d'interaction extérieures $A_{\text{ext}}^{\text{in}}$ et le travail des forces d'inertie A_{inert}. Pour insister sur ce fait, récrivons l'équation (3.50) sous la forme

$$E_2 - E_1 = A_{\text{inert}} + A_{\text{ext}}^{\text{in}} + A_{\text{int}}^{\text{dis}}. \tag{3.52}$$

Ainsi, nous avons abouti au résultat important suivant : l'énergie mécanique d'un système peut changer sous l'action aussi bien des forces extérieures que des forces dissipatives intérieures (plus précisément, sous l'action de la somme algébrique des *travaux* de toutes ces forces). Il s'ensuit immédiatement une autre conclusion importante : la *loi de conservation de l'énergie mécanique* :

au cours du mouvement dans un référentiel galiléen l'énergie mécanique d'un système de particules fermé qui ne comporte pas de forces dissipatives se conserve, c'est-à-dire

$$\boxed{E = T + U_{\text{pr}} = \text{const.}} \tag{3.53}$$

Un tel système est dit *conservatif* *. Notons que dans le mouvement d'un système conservatif fermé c'est précisément l'énergie mécanique totale qui se conserve, alors que dans le cas général les énergies cinétique et potentielle changent. Toutefois, ces variations se produisent toujours de façon que l'accroissement de l'une d'entre elles est égal exactement à la décroissance de l'autre, c'est-à-dire $\Delta T = -\Delta U$. Il est clair que cette affirmation n'est vraie que pour des référentiels galiléens.

Ensuite, l'équation (3.50) entraîne que si un système fermé est non conservatif, c'est-à-dire s'il comporte des forces dissipatives, alors d'après (3.45) son énergie mécanique décroît

$$E_2 - E_1 = A_{\text{int}}^{\text{dis}} < 0. \tag{3.54}$$

---

* Avec une approximation assez bonne on peut considérer comme tel le Système solaire.

On peut dire que la diminution de l'énergie mécanique est conditionnée par le fait qu'elle est absorbée par le travail contre les forces dissipatives en action dans le système. Pourtant, une telle explication serait formelle, puisqu'elle ne dégage pas la nature physique des forces dissipatives.

Une intelligence plus profonde de cette question a conduit à la conclusion fondamentale sur l'existence dans la nature de la *loi de conservation de l'énergie universelle*:

l'énergie n'est jamais produite ni détruite, elle peut seulement passer d'une forme à l'autre ou s'échanger entre les parties isolées de la matière. Aussi a-t-il fallu étendre la notion de l'énergie sur ses formes nouvelles (en plus de l'énergie mécanique): énergie du champ électromagnétique, énergie chimique, nucléaire, etc.

Ainsi, la loi universelle de conservation de l'énergie régit également des phénomènes physiques dans lesquels les lois de Newton n'interviennent pas. Elle ne peut donc pas être déduite de ces lois, et il faut la considérer comme indépendante, présentant une des plus vastes généralisations des faits d'expérience.

En revenant à l'équation (3.54) on peut dire: lorsque l'énergie mécanique d'un système fermé diminue, une quantité équivalente de l'énergie apparaît sous d'autres formes non liées au mouvement *manifeste*. Dans ce sens les équations (3.49)-(3.51) peuvent être considérées comme une formulation plus générale de la loi de conservation de l'énergie, formulation qui rend évidente la *cause* de la variation de l'énergie mécanique dans un système ouvert.

En particulier, l'énergie mécanique d'un tel système peut se conserver, mais ceci n'a lieu que lorsque, d'après l'équation (3.50), cette énergie, absorbée par le travail contre les forces dissipatives intérieures, est compensée par l'apport d'énergie fournie par les forces extérieures.

Energie d'un système dans un champ extérieur. Si le système de particules qui nous intéresse se trouve dans un champ conservatif extérieur, il est souvent commode de faire appel à une autre expression de l'énergie totale E.

En effet, dans notre cas, les forces extérieures qui agissent sur les particules du système, peuvent être divisées en forces appliquées à partir du champ extérieur (forces conservatives extérieures), et toutes les autres forces extérieures non associées au champ conservatif donné, les forces extérieures étrangères. Respectivement, le travail δA_{ext} des forces extérieures peut être mis sous la forme de la somme algébrique des travaux élémentaires des forces conservatives extérieures et des forces extérieures étrangères

$$\delta A_{ext} = \delta A_{ext}^{c} + \delta A_{ext}^{ét}.$$

Mais le travail des forces conservatives extérieures peut à son tour être représenté comme la décroissance de l'énergie potentielle du

système dans le champ de ces forces, c'est-à-dire $\delta A_{ext}^{c} = -dU_{ext}$. Il vient

$$\delta A_{ext} = -dU_{ext} + \delta A_{ext}^{ét}.$$

En portant cette expression dans la formule (3.46), on obtient

$$d(T + U_{pr} + U_{ext}) = \delta A_{ext}^{ét} + \delta A_{int}^{dis}. \qquad (3.55)$$

La grandeur entre parenthèses du premier membre s'appelle énergie mécanique totale E du système placé dans un champ conservatif extérieur

$$\boxed{E = T + U_{pr} + U_{ext}.} \qquad (3.56)$$

A la différence de l'expression (3.47), cette énergie totale traduit non seulement l'énergie cinétique globale et l'énergie potentielle propre, mais encore l'énergie potentielle du système dans le champ conservatif extérieur U_{ext}.

Compte tenu de (3.56) l'équation (3.55) peut se récrire comme suit

$$dE = \delta A_{ext}^{ét} + \delta A_{int}^{dis},$$

où

$$\boxed{E_2 - E_1 = A_{ext}^{ét} + A_{int}^{dis}.} \qquad (3.57)$$

Cette équation amène la *loi de conservation de l'énergie mécanique totale* d'un système placé dans un champ conservatif extérieur:

si le système qui nous intéresse n'est pas sollicité par des forces étrangères extérieures et des forces dissipatives intérieures, son énergie mécanique totale E reste constante:

$$\boxed{E = T + U_{pr} + U_{ext} = \text{const.}} \qquad (3.58)$$

Le plus simple exemple d'un tel système peut être fourni par deux petits corps liés entre eux par un ressort. Si ce système se déplace dans le champ de pesanteur de la Terre en l'absence de résistance de l'air (les forces étrangères extérieures sont absentes), ses énergies cinétique, potentielle propre et potentielle extérieure changent, mais leur somme algébrique reste constante.

Un autre exemple est celui du système Terre-Lune dans le champ d'attraction du Soleil. T, U_{pr} et U_{ext} de ce système changent aussi dans le mouvement, mais leur somme algébrique se conserve.

A titre de conclusion il faut noter une fois de plus que l'équation (3.57) s'observe aussi bien dans les référentiels galiléens que non galiléens, alors que la loi de conservation de l'énergie n'est observée que dans les référentiels galiléens.

Problèmes du chapitre 3

● **3.1.** Une pierre de masse m est lancée de la surface de la Terre sous un angle α à l'horizon à la vitesse initiale $\mathbf{v}_0$. En négligeant la résistance de l'air, calculer la puissance de la force de pesanteur t secondes après le lancement, ainsi que le travail de cette force pendant les premières t secondes du mouvement.

Solution. La vitesse de la pierre t secondes après le lancement $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{g}t$. La puissance développée par la force de pesanteur $m\mathbf{g}$ à cet instant

$$N = m\mathbf{g}\mathbf{v} = m\,(\mathbf{g}\mathbf{v}_0 + g^2t).$$

Dans notre cas $\mathbf{g}\mathbf{v}_0 = gv_0 \cos(\pi/2 + \alpha) = -gv_0 \sin\alpha$; donc

$$N = mg\,(gt - v_0 \sin\alpha).$$

Il est clair que pour $t < t_0 = v_0 \sin\alpha/g$, la puissance $N < 0$, et avec $t > t_0$, $N > 0$.

Le travail réalisé par la force de pesanteur pendant les t premières secondes

$$A = \int_0^t N\,dt = mg(gt^2/2 - v_0 \sin\alpha \cdot t).$$

Les diagrammes des relations $N(t)$ et $A(t)$ sont représentés sur la figure 47.

● **3.2.** Il existe deux champs de forces stationnaires:

1) $\mathbf{F} = ay\mathbf{i}$;
2) $\mathbf{F} = ax\mathbf{i} + by\mathbf{j}$,

où $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ sont les vecteurs unités des axes x et y; a et b, des constantes. Ces champs de forces sont-ils conservatifs?

Solution. Calculons le travail de la force de chaque champ sur le chemin parcouru d'un point $1\,(x_1, y_1)$ au point $2\,(x_2, y_2)$:

$$1)\ \delta A = \mathbf{F}d\mathbf{r} = ay\mathbf{i}d\mathbf{r} = ay\,dx;\ A = a\int_{x_1}^{x_2} y\,dx;$$

$$2)\ \delta A = \mathbf{F}d\mathbf{r} = (ax\mathbf{i} + by\mathbf{j})\,d\mathbf{r} = ax\,dx + by\,dy;\quad A = a\int_{x_1}^{x_2} x\,dx + b\int_{y_1}^{y_2} y\,dy.$$

Dans le premier cas l'intégrale dépend de la forme de la fonction $y(x)$, c'est-à-dire de la forme du chemin; donc, le premier champ de forces n'est pas conservatif. Dans le deuxième cas, les deux intégrales ne dépendent pas de la forme du chemin: elles dépendent seulement des coordonnées de ses points initial et final; par conséquent, le deuxième champ de forces est conservatif.

● **3.3.** La force appliquée à une particule dans un champ conservatif est donnée par l'équation

$$\mathbf{F} = a(y\mathbf{i} + x\mathbf{j}),$$

où a est une constante; $\mathbf{i}$ et $\mathbf{j}$, les vecteurs unités des axes x et y respectivement. Calculer l'énergie potentielle $U(x, y)$ de la particule dans ce champ.

Solution. Calculons le travail de la force $\mathbf{F}$ sur le chemin du point O (fig. 48) au point arbitraire $P\,(x, y)$. Profitant de ce que ce travail ne doit pas dépendre de la forme du chemin, choisissons comme dernier chemin OMP, composé de deux segments rectilignes. Il vient

$$A_{OP} = \int_O^M \mathbf{F}\,d\mathbf{r} + \int_M^P \mathbf{F}\,d\mathbf{r}.$$

La première intégrale est nulle, puisque en tous les points du chemin OM $y = 0$ et $\mathbf{F} \perp d\mathbf{r}$. Pour ce qui est du chemin MP, sa coordonnée $x = \text{const}$; $\mathbf{F}d\mathbf{r} = \mathbf{F}\mathbf{j}dy = F_y dy = ax dy$; donc

$$A_{OP} = 0 + ax \int_M^P dy = axy.$$

D'après (3.10) ce travail doit être égal à la décroissance de l'énergie potentielle, c'est-à-dire $A_{OP} = U_O - U_P$. En posant $U_O = 0$, on obtient $U_P = -A_{OP}$, ou

$$U(x, y) = -axy.$$

Un autre mode de calcul de $U(x, y)$ est celui qui consiste à déterminer la différentielle totale de cette fonction:

$$dU = (\partial U/\partial x)\, dx + (\partial U/\partial y)\, dy.$$

En retenant que $\partial U/\partial x = -F_x = -ay$ et $\partial U/\partial y = -F_y = -ax$, on obtient

$$dU = -a(y dx + x dy) = d(-axy).$$

D'où $U(x, y) = -axy$.

● 3.4. Une bille de masse m est suspendue à un fil élastique impondérable dont le coefficient de rigidité est $\varkappa$. La bille est montée de façon que le fil se

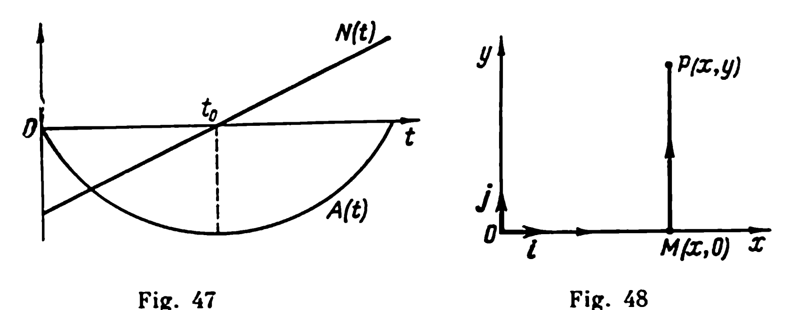


Fig. 47 Fig. 48

trouve à l'état non déformé, puis lâchée sans vitesse initiale. Calculer l'allongement maximal du fil x_m au cours du mouvement de la bille.

Solution. Examinons plusieurs modes de résolution fondés sur des considérations énergétiques.

1. Partons de l'équation (3.28): l'accroissement de l'énergie cinétique de la bille est égal à la somme algébrique de *toutes* les forces qui agissent sur elle. Dans notre cas c'est la force de pesanteur mg et la force élastique appliquée de la part du fil $F_{él} = \varkappa x$ (fig. 49, *a*). En positions initiale et finale de la bille son énergie cinétique est nulle (il est clair que l'allongement maximal du fil arrêtera la bille); donc, d'après (3.28) la somme des travaux $A_{pes} + A_{él} = 0$, ou

$$mgx_m + \int_0^{x_m} (-\varkappa x)\, dx = mgx_m - \varkappa x_m^2/2 = 0.$$

On en tire $x_m = 2mg/\varkappa$.

2. On peut considérer la bille dans le champ de pesanteur de la Terre. Dans une telle approche il convient de considérer l'énergie mécanique totale de la bille dans ce champ de pesanteur. D'après (3.32) l'accroissement de cette énergie est égal au travail des forces étrangères. Dans notre cas, il faut considérer comme

force étrangère la force élastique; et l'accroissement de l'énergie mécanique totale de la bille est égal seulement à celui de son énergie potentielle dans le champ de pesanteur de la Terre. Donc

$$0 - mgx_m = \int_0^{x_m} (-\varkappa x)\,dx = -\varkappa x_m^2/2.$$

On en tire pour x_m le même résultat.

Notons qu'on aurait pu procéder d'une façon inverse, c'est-à-dire examiner la bille dans le champ de la force élastique; alors, le rôle de force étrangère reviendrait au champ de pesanteur. Il est utile de faire soi-même les calculs correspondants pour en venir au même résultat.

3. Enfin, la bille peut être considérée dans un champ formé par l'action commune de la force de pesanteur et de la force élastique. Alors, il n'y aurait

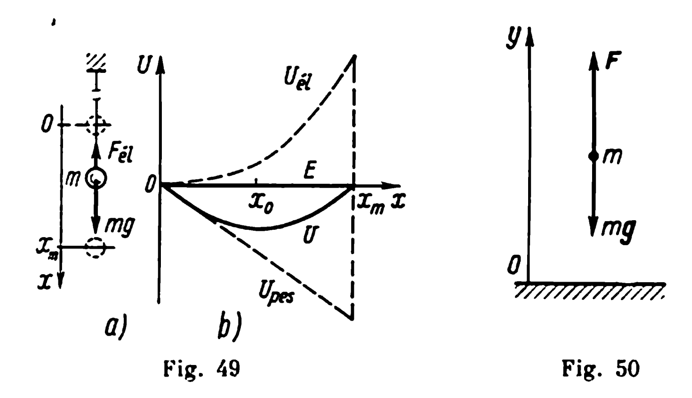


Fig. 49 Fig. 50

pas de forces étrangères et au cours du mouvement l'énergie mécanique totale de la bille resterait constante, c'est-à-dire $\Delta E = \Delta T + \Delta U = 0$. Lors du passage de la bille de l'état initial à l'état final (inférieur) $\Delta T = 0$; donc $\Delta U = \Delta U_{pes} + \Delta U_{él} = 0$, ou

$$-mgx_m + \varkappa x_m^2/2 = 0.$$

Le résultat est encore le même.

La figure 49, *b* représente les diagrammes des relations $U_{pes}(x)$ et $U_{él}(x)$, dont l'origine est prise en $x = 0$ (ce qui n'est pas bien sûr de rigueur). Sur la même figure est représenté le diagramme de la relation de l'énergie potentielle globale $U(x) = U_{pes} + U_{él}$. Pour le choix considéré de l'origine des coordonnées de l'énergie potentielle, l'énergie mécanique totale de la bille $E = 0$.

● 3.5. Un corps de masse m monte sans vitesse initiale à partir de la surface terrestre sous l'action de la force **F** qui change avec la hauteur y d'après la formule $\mathbf{F} = -2m\mathbf{g}(1 - ay)$, où a est une constante positive, et de la force de pesanteur $m\mathbf{g}$ (fig. 50). Calculer le travail de la force **F** dans la première moitié de la montée et l'accroissement correspondant de l'énergie potentielle du corps dans le champ de pesanteur terrestre. Admettre que ce champ est homogène.

Solution. Calculons d'abord tout le chemin de la montée. Au début et à la fin du chemin la vitesse du corps est nulle; donc, l'accroissement de l'énergie cinétique du corps sera nul lui aussi. D'autre part, d'après (3.28) ΔT est égal à la somme algébrique des travaux A de toutes les forces sur ce chemin, c'est-à-dire des travaux de la force **F** et de la force de pesanteur. Or, puisque $\Delta T = 0$,

$A = 0$ également. La direction positive de l'axe des y étant prise vers le haut, écrivons

$$A = \int (\mathbf{F} + m\mathbf{g})\, d\mathbf{r} = \int_0^h (F_y - mg)\, dy =$$

$$= mg \int_0^h (1 - 2ay)\, dy = mgh\,(1 - ah) = 0.$$

On en tire $h = 1/a$.

Le travail de la force $\mathbf{F}$ sur la première moitié de la montée

$$A_F = \int_0^{h/2} F_y\, dy = 2mg \int_0^{h/2} (1 - ay)\, dy = 3mg/4a.$$

L'accroissement correspondant de l'énergie potentielle

$$\Delta U = mgh/2 = mg/2a.$$

● **3.6.** Une rondelle glisse sans frottement en montant une pente d'une hauteur h, dont le profil dépend seulement de la coordonnée x (fig. 51, *a*). En position inférieure la vitesse de la rondelle est v_1, la direction de la vitesse fait un angle α_1 avec l'axe des x (fig. 51, *b* qui donne la vue d'en haut). Trouver la direction du mouvement de la rondelle une fois qu'elle a monté la pente, c'est-à-dire calculer l'angle α_2.

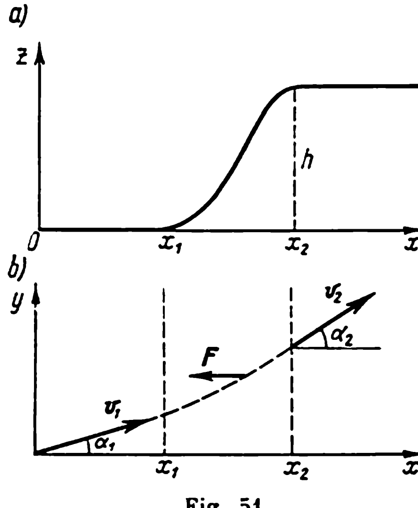


Fig. 51

Solution. Notons d'abord qu'en général il est impossible de résoudre ce problème en appliquant l'équation fondamentale de la dynamique, puisque la loi de la force F n'est pas donnée. Or, cette force agit sur la rondelle dans le domaine $x_1 < x < x_2$ et on sait seulement qu'elle est perpendiculaire à l'axe des y.

Appliquons la loi de conservation de l'énergie $mv_1^2 = mv_2^2 + 2mgh$, d'où

$$v_2^2 = v_1^2 - 2gh. \quad (1)$$

Récrivons cette expression comme suit

$$v_{2x}^2 + v_{2y}^2 = v_{1x}^2 + v_{1y}^2 - 2gh.$$

Il s'ensuit du fait que la force du champ est perpendiculaire à l'axe des y qu'elle ne change pas la projection v_y de la vitesse, d'où $v_{2y} = v_{1y}$. L'expression précédente se simplifie donc $v_{2x}^2 = v_{1x}^2 - 2gh$, ou

$$v_2 \cos\alpha_2 = \sqrt{v_1^2 \cos^2\alpha_1 - 2gh}, \quad (2)$$

où v_2 est déterminée par l'équation (1). Il en résulte

$$\cos\alpha_2 = \sqrt{(v_1^2 \cos^2\alpha_1 - 2gh)/(v_1^2 - 2gh)}.$$

Notons que cette solution est vraie si l'expression du radicande de (2) n'est pas négative, c'est-à-dire avec $v_1 \cos\alpha_1 > \sqrt{2gh}$. Dans le cas contraire

la rondelle ne surmontera pas la pente, c'est-à-dire elle sera « reflétée » par la barrière du potentiel.

● 3.7. Une spirale plane en fil de fer lisse rigide placée dans le plan horizontal est entraînée en rotation à une vitesse angulaire constante ω autour d'un axe vertical fixe O (fig. 52). Un petit manchon M glisse sur la spirale sans frottement. Calculer sa vitesse v' par rapport à la spirale en tant que fonction de sa distance ρ de l'axe de rotation O, si le manchon a commencé son mouvement à partir de cet axe à la vitesse v_0'.

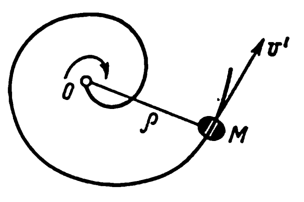


Fig. 52

Solution. Le plus avantageux est de résoudre ce problème dans le système de référence lié à la spirale. Nous savons que l'accroissement de l'énergie cinétique du manchon doit être égal à la somme algébrique des travaux de toutes les forces qui lui sont appliquées. On voit sans peine que de toutes les forces seule la force centrifuge effectue un travail (les autres forces, celle de la pesanteur, de réaction de la part de la spirale, et de Coriolis sont perpendiculaires à la vitesse $\mathbf{v}'$ du manchon et n'effectuent donc pas de travail).

D'après l'équation (3.28)

$$m(v'^2 - v_0'^2)/2 = \int m\omega^2\boldsymbol{\rho}\, d\mathbf{r},$$

où m est la masse du manchon ; $d\mathbf{r}$, son déplacement élémentaire par rapport à la spirale. Puisque $\boldsymbol{\rho} d\mathbf{r} = \rho\,(d\mathbf{r})_\rho = \rho d\rho$, l'intégrale s'avère égale à $m\omega^2\rho^2/2$. D'où la vitesse cherchée

$$v' = \sqrt{v_0'^2 + \omega^2\rho^2}.$$

● 3.8. Trouver le potentiel et l'intensité du champ gravitationnel produit par une sphère homogène de masse M et de rayon R en fonction de la distance r de son centre.

Solution. Montrons avant tout que le potentiel créé par une couche homogène mince sphérique de matière est tel hors de la couche, comme si toute la masse

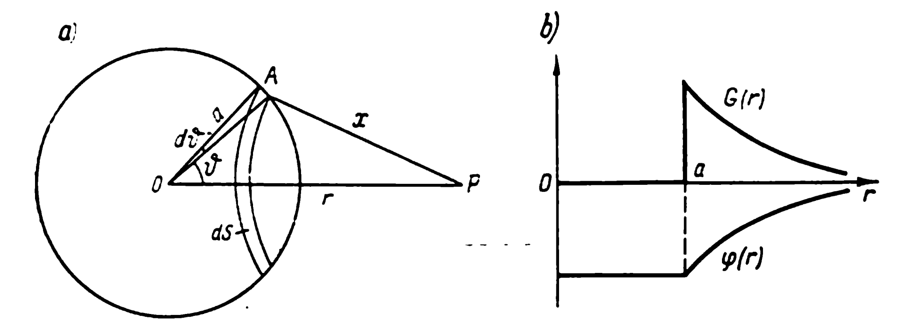


Fig. 53

de la couche était concentrée en son centre et le potentiel à l'intérieur de la couche était le même en tous les points.

Soit une couche sphérique mince de masse m et de rayon a. Calculons d'abord le potentiel $d\varphi$ en P $(r > a)$ tel qu'il forme une ceinture élémentaire dS de la couche donnée (fig. 53, a). Si la masse de cette ceinture est dm et ses points se

trouvent à la distance x du point P, alors $d\varphi = -\gamma dm/x$. Compte tenu que $dm = (m/2) \sin\vartheta d\vartheta$, on obtient

$$d\varphi = -(\gamma m/2x) \sin\vartheta d\vartheta. \quad (1)$$

Ensuite, le théorème des cosinus (pour ΔOAP) entraîne que $x^2 = a^2 + r^2 - 2ar\cos\vartheta$. En dérivant cette expression, on trouve

$$xdx = ar \sin\vartheta \, d\vartheta. \quad (2)$$

Ramenons (1) à l'aide de (2) à la forme $d\varphi = -(\gamma m/2ar)\, dx$ et intégrons cette équation sur toute la couche. Il vient

$$\varphi_{ext} = -(\gamma m/2ar) \int_{r-a}^{r+a} dx = -\gamma m/r. \quad (3)$$

De la sorte, en effet, le potentiel en P hors d'une couche homogène sphérique mince est tel comme si toute la masse de cette couche était concentrée en son centre.

Mais si le point P se trouve à l'intérieur de la couche ($r < a$), les calculs précédents gardent leur validité, l'intégration y comprise. Maintenant les limites d'intégration sur x seront de $a - r$ à $a + r$. Il en résulte

$$\varphi_{int} = -\gamma m/a, \quad (4)$$

c'est-à-dire le potentiel à l'intérieur de la couche ne dépend pas de la position du point P; par conséquent, il sera le même en tous les points à l'intérieur de la couche.

D'après (3.24) l'intensité du champ en P est égale à

$$G_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \begin{cases} -\gamma m/r^2 & \text{hors de la couche;} \\ 0 & \text{à l'intérieur de la couche.} \end{cases}$$

Les diagrammes des relations $\varphi(r)$ et $G(r)$ pour une couche sphérique mince sont représentés sur la figure 53, *b*.

Maintenant généralisons les résultats obtenus à une sphère homogène de masse M et de rayon R. Si le point P se trouve hors de la sphère ($r > R$), la formule (3) entraîne

$$\varphi_{ext} = -\gamma M/r. \quad (5)$$

Mais si le point P se trouve à l'intérieur de la sphère ($r < R$), le potentiel φ en ce point peut être présenté comme une somme

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2,$$

où φ_1 est le potentiel par rapport à la sphère de rayon r; φ_2, le potentiel de la couche de rayon r à R. D'après (5)

$$\varphi_1 = -\gamma \frac{M(r/R)^3}{r} = -\gamma \frac{M}{R^3} r^2.$$

Quant au potentiel φ_2 produit par la couche, il est le même en tous les points à l'intérieur de cette couche. Le plus simple est de calculer φ_2 pour un point au centre de la couche

$$\varphi_2 = -\gamma \int_r^R \frac{dM}{r} = -\frac{3}{2} \frac{\gamma M}{R^3} (R^2 - r^2),$$

où $dM = (3M/R^3)\, r^2\, dr$ est la masse de la couche mince entre les rayons r et $r + dr$. Il en résulte

$$\varphi_{int} = \varphi_1 + \varphi_2 = -(\gamma M/2R)(3 - r^2/R^2). \quad (6)$$

Comme il résulte de (5) et (6), l'intensité du champ en P

$$G_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \begin{cases} -\gamma M/r^2 & \text{avec } r > R, \\ -\gamma M r/R^3 & \text{avec } r < R. \end{cases}$$

Les diagrammes des relations $\varphi(r)$ et $G(r)$ pour une sphère homogène de rayon R sont donnés par la figure 54.

● **3.9.** Montrer que l'énergie cinétique T_2 nécessaire pour éloigner un corps au-delà des limites de l'attraction terrestre est de deux fois supérieure à l'énergie cinétique T_1 nécessaire pour le placer sur l'orbite circulaire d'un satellite artificiel de la Terre (près de sa surface). Négliger la résistance de l'air et la rotation de la Terre.

Solution. Calculons la vitesse v_1 d'un corps qui se déplace sur une orbite circulaire. D'après l'équation fondamentale de la dynamique

$$mv_1^2/R = mg,$$

où m est la masse du corps; R, le rayon de l'orbite égal à peu près au réyon de la Terre. On en tire

$$v_1 = \sqrt{gR} = 7{,}9 \quad \text{km/s}.$$

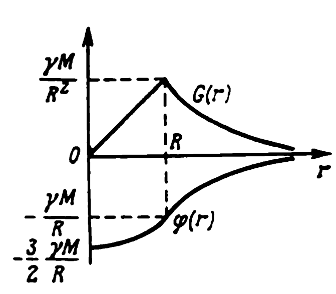


Fig. 54

C'est ce qu'on appelle *première vitesse cosmique.*

Pour qu'un corps puisse surmonter le champ d'attraction terrestre, il faut lui communiquer la *deuxième vitesse cosmique* v_2. On peut la calculer à partir de la loi de conservation de l'énergie : au ras du sol l'énergie cinétique doit être égale à la hauteur de la barrière du potentiel que le corps doit surmonter. Cette hauteur est égale à l'accroissement de l'énergie potentielle du corps entre les points $r_1 = R$ et $r_2 = \infty$. De cette façon

$$mv_2^2/2 = \gamma mM/R,$$

où M est la masse de la Terre. Il en résulte

$$v_2 = \sqrt{2\gamma M/R} = \sqrt{2gR} = 11 \quad \text{km/s}.$$

Par conséquent, $v_2 = \sqrt{2}\, v_1$ et $T_2 = 2T_1$.

● **3.10.** Trois particules chargées identiques de masse m et de charge $+q$ chacune ont été placées aux sommets des angles d'un triangle équilatéral aux côtés r_0. Puis on les a libérées simultanément pour qu'elles s'envolent dans des directions symétriques sous l'action des forces de répulsion coulombiennes. Calculer

1) la vitesse de chaque particule en fonction de la distance r entre elles;

2) le travail A_1 effectué par les forces coulombiennes agissant sur chaque particule lorsque la distance entre les particules devient très grande.

Solution. 1. Le système donné est fermé; donc l'accroissement de son énergie cinétique est égal à la décroissance de l'énergie potentielle, c'est-à-dire

$$3mv^2/2 = 3kq^2/r_0 - 3kq^2/r.$$

D'où

$$v = \sqrt{2kq^2 (r - r_0)/mrr_0}.$$

Il est clair que pour $r \to \infty$, la vitesse de chaque particule tend vers la valeur limite $v_{max} = \sqrt{2kq^2/mr_0}$.

2. Lors de la variation de la configuration du système, le travail de toutes les forces d'interaction est égal à la décroissance de son énergie potentielle

$$A = U_1 - U_2 = 3kq^2/r_0,$$

où on a tenu compte qu'en position finale $U_2 = 0$. D'où le travail cherché

$$A_1 = A/3 = kq^2/r_0. \quad (1)$$

Nota. Il convient d'attirer ici l'attention sur une faute fréquente qu'on commet en résolvant les problèmes de ce type. Le raisonnement est alors le suivant: en position initiale l'énergie potentielle de chaque particule est égale à $2kq^2/r_0$. et en position finale elle est nulle. D'où le travail cherché $A_1 = 2kq^2/r_0$. Il est clair que ce résultat est deux fois plus grand que (1). Pourquoi en est-il ainsi?

L'erreur consiste dans le fait que le champ dans lequel se déplace chaque particule est non stationnaire, et par conséquent, non conservatif (les deux autres particules se déplacent également l'une par rapport à l'autre); donc, dans un tel champ, le travail ne peut pas être considéré comme la décroissance de l'énergie potentielle de la particule.

● 3.11. En utilisant la solution du problème 3.8, calculer l'énergie potentielle propre de l'interaction gravitationnelle des masses distribuées uniformément

1) à la surface d'une sphère;

2) dans son volume.

La masse de la sphère est M, son rayon est R.

Solution. 1. En prenant en considération qu'en chaque point de la sphère le potentiel est $\varphi = -\gamma M/R$, on obtient d'après la formule (3.40)

$$U = (\varphi/2) \int dm = -\gamma M^2/2R.$$

2. Dans ce cas le potentiel à l'intérieur de la sphère (cf. le problème 3.8) ne dépend que de r:

$$\varphi = -(3\gamma M/2R)(1 - r^2/3R^2).$$

En portant cette expression dans la formule (3.40) et en intégrant, on obtient

$$U = \frac{1}{2} \int_{r=0}^{R} \varphi \, dm = -\frac{3}{5} \frac{\gamma M^2}{R},$$

où dm est la masse d'une couche sphérique élémentaire comprise entre les rayons r et $r + dr$; $dm = (3M/R^3)\, r^2\, dr$.

CHAPITRE 4

LOI DE CONSERVATION DE L'IMPULSION

§ 4.1. Impulsion. Loi de sa conservation

Impulsion * d'une particule. L'expérience et l'analyse correspondante des phénomènes mécaniques montrent que pour caractériser le mouvement mécanique des corps, en plus de l'énergie cinétique $T = mv^2/2$ il faut introduire encore une grandeur, celle de l'*impulsion* $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$. Ces deux grandeurs, dont la première est scalaire et la deuxième vectorielle, sont les caractéristiques fondamentales du mouvement mécanique des corps. Dans la théorie leur rôle est capital.

Examinons cette question de plus près. Ecrivons d'abord l'équation fondamentale de la dynamique newtonienne (2.6) sous une autre forme, à l'aide de l'impulsion:

$$\boxed{d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F},} \tag{4.1}$$

c'est-à-dire *la dérivée de l'impulsion d'un point matériel par rapport au temps est égale à la force qui lui est appliquée.* Notamment, si $\mathbf{F} \equiv 0$, $\mathbf{p} = \text{const}$.

Notons que dans un référentiel non galiléen, la force $\mathbf{F}$ inclut non seulement les forces d'interaction de la particule donnée avec d'autres corps, mais encore les forces d'inertie.

Si on connaît la relation entre la force $\mathbf{F}$ et le temps, l'équation (4.1) permet de calculer l'accroissement de l'impulsion d'une particule en un intervalle de temps quelconque. En effet, (4.1) entraîne que l'accroissement élémentaire de l'impulsion d'une particule en un intervalle de temps dt est $d\mathbf{p} = \mathbf{F}\,dt$. En intégrant cette expression sur le temps, on trouve l'accroissement en un intervalle de temps fini t:

$$\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = \int_0^t \mathbf{F}\,dt. \tag{4.2}$$

La grandeur qui figure dans le deuxième membre de cette expression s'appelle *impulsion de la force.* De la sorte, l'accroissement de l'im-

* Une autre dénomination de cette grandeur est la *quantité de mouvement.*

pulsion en un intervalle de temps quelconque est égal à l'impulsion de la force pendant ce temps. Si la force $\mathbf{F}$ = const, le vecteur $\mathbf{F}$ peut être sorti du signe somme et alors $\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = \mathbf{F}t$.

Exemple. Une force $\mathbf{F} = \mathbf{a}t\,(1 - t/\tau)$, où $\mathbf{a}$ est un vecteur constant, agit pendant un intervalle de temps τ sur une particule qui à l'instant initial $t = 0$ avait l'impulsion $\mathbf{p}_0$. Calculer l'impulsion $\mathbf{p}$ de la particule, lorsque la force cesse d'agir.

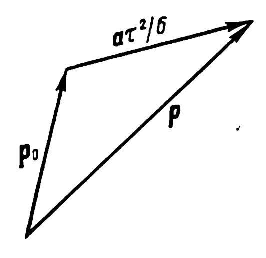


Fig. 55

D'après (4.2) on obtient $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + \int_0^\tau \mathbf{F}\,dt = \mathbf{p}_0 + \mathbf{a}\tau^2/6$ (fig. 55).

Impulsion d'un système. Examinons un système de particules arbitraire. Introduisons la notion d'*impulsion d'un système* en tant que somme vectorielle des impulsions de ses particules isolées

$$\mathbf{p} = \sum \mathbf{p}_i, \tag{4.3}$$

où $\mathbf{p}_i$ est l'impulsion de l'i-ième particule. Notons que l'impulsion d'un système est une grandeur additive, c'est-à-dire égale à la somme des impulsions de ses parties isolées, indépendamment du fait si ces particules interagissent entre elles ou non.

Cherchons la grandeur physique qui détermine la variation de l'impulsion d'un système. A cet effet dérivons (4.3) par rapport au temps

$$d\mathbf{p}/dt = \sum d\mathbf{p}_i\,dt.$$

D'après (4.1)

$$d\mathbf{p}_i/dt = \sum_k \mathbf{F}_{ik} + \mathbf{F}_i,$$

où $\mathbf{F}_{ik}$ sont les forces qui agissent sur l'i-ième particule de la part des autres particules du système (forces intérieures) ; $\mathbf{F}_i$, la force qui agit sur cette même particule de la part des autres corps qui font partie du système considéré (forces extérieures). En portant cette dernière expression dans la précédente, on obtient

$$d\mathbf{p}/dt = \sum_i \sum_k \mathbf{F}_{ik} + \sum_i \mathbf{F}_i.$$

La somme double du deuxième membre est la somme de toutes les forces intérieures. Conformément à la troisième loi de Newton, les forces d'interaction entre les particules d'un système sont les mêmes deux à deux en module et opposées en direction. La résultante de chaque paire d'interaction est donc nulle, et par suite, la somme vectorielle de toutes les forces intérieures l'est aussi. Il en résulte

que la dernière équation devient

$$\boxed{d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F},} \tag{4.4}$$

où **F** est la résultante de toutes les forces *extérieures*: $\mathbf{F} = \sum \mathbf{F}_i$.

L'équation (4.4) signifie: *la dérivée de l'impulsion d'un système par rapport au temps est égale à la somme vectorielle de toutes les forces extérieures* qui agissent sur les particules du système.

Tout comme dans le cas d'une particule, l'équation (4.4) entraîne que l'accroissement de l'impulsion d'un système en un intervalle de temps fini t s'écrit

$$\boxed{\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = \int_0^t \mathbf{F}\, dt,} \tag{4.5}$$

c'est-à-dire l'accroissement de l'impulsion d'un système est égal à l'impulsion de la résultante de toutes les forces extérieures en un intervalle de temps correspondant. Là aussi **F** est la résultante de toutes les forces *extérieures.*

Les équations (4.4) et (4.5) sont vraies aussi bien dans un référentiel galiléen que non galiléen. Il convient seulement de retenir que dans un référentiel non galiléen, il faut encore prendre en considération l'action des *forces d'inertie* qui jouent le rôle de forces extérieures, c'est-à-dire dans ces équations il faut entendre par **F** la somme $\mathbf{F}_{\text{inter}} + \mathbf{F}_{\text{in}}$, où $\mathbf{F}_{\text{inter}}$ est la résultante de toutes les forces d'interaction, et $\mathbf{F}_{\text{in}}$, la résultante de toutes les forces d'inertie.

Loi de conservation de l'impulsion. Nous sommes amenés ainsi à une conclusion importante: d'après l'équation (4.4) *l'impulsion d'un système peut changer seulement sous l'action des forces extérieures.* Les forces intérieures ne peuvent pas la modifier. On en tire directement une autre conclusion importante, à savoir la *loi de conservation de l'impulsion*: *dans un référentiel galiléen l'impulsion d'un système de particules fermé reste constante*, c'est-à-dire ne change pas dans le temps

$$\boxed{\mathbf{p} = \sum \mathbf{p}_i(t) = \text{const.}} \tag{4.6}$$

Dans ces conditions, les impulsions des particules isolées ou des parties d'un système fermé peuvent changer dans le temps, et c'est ce sur quoi insiste l'expression (4.6). Pourtant, ces changements se produisent toujours de façon que l'accroissement de l'impulsion d'une partie du système est égal à sa décroissance pour la partie restante. Autrement dit, les parties isolées d'un système fermé ne peuvent qu'échanger des impulsions. En observant dans un certain système un accroissement de l'impulsion, nous pouvons affirmer

que cet accroissement résulte de la décroissance de l'impulsion dans les corps qui entourent ce système.

Dans ce sens les équations (4.4) et (4.5) doivent être envisagées comme une formulation plus générale de la loi de conservation de l'impulsion, formulation dans laquelle est indiquée la *cause* de sa variation dans un système ouvert; cette cause est l'action d'autres corps (de forces extérieures). Ce qui vient d'être dit n'est vrai, bien sûr, que pour des référentiels galiléens.

L'impulsion peut se conserver également dans un système ouvert sous la condition que la résultante de toutes les forces extérieures soit nulle. Ceci est immédiat des équations (4.4) et (4.5). Dans ces cas, la conservation de l'impulsion présente un intérêt particulier dans le sens pratique, puisqu'elle permet sans recourir à une analyse détaillée du processus d'obtenir d'une façon suffisamment simple plusieurs renseignements sur le comportement du système.

Un système ouvert peut conserver non pas l'impulsion **p** elle-même, mais sa projection p_x sur une certaine direction x. Il en est ainsi lorsque la projection de la résultante des forces extérieures **F** sur la direction de x est nulle, c'est-à-dire lorsque le vecteur **F** est perpendiculaire à cette direction. En effet, en projetant l'équation (4.4), on obtient

$$dp_x/dt = F_x, \tag{4.7}$$

d'où il s'ensuit que si $F_x \equiv 0$, $p_x = \text{const}$. Par exemple, lors du mouvement d'un système dans le champ homogène des forces de pesanteur, la projection de son impulsion sur toute direction horizontale se conserve quoi qu'il arrive dans le système.

Examinons des exemples de variation et de conservation de l'impulsion.

Exemple 1. Un canon de masse m glisse sur une pente lisse qui fait un angle α avec l'horizon. A l'instant où la vitesse du canon devient **v**, on tire un coup; il en résulte que le canon s'arrête, alors que l'obus parti dans une direction horizontale « emporte » une impulsion **p**. Supposons que la durée du tir est t. Quelle est, en un intervalle de temps t, la valeur moyenne de la force de réaction **R** de la part de la pente?

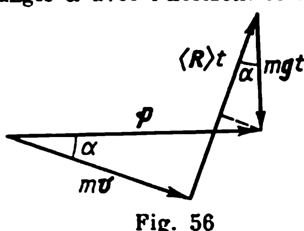


Fig. 56

Ici le système canon-obus est un système ouvert. Pendant le temps t l'accroissement de son impulsion est égal à $\mathbf{p} - m\mathbf{v}$. La variation de l'impulsion est conditionnée par l'action de la force de réaction **R** (perpendiculaire à la pente) et de la force de pesanteur $m\mathbf{g}$. On peut donc écrire

$$\mathbf{p} - m\mathbf{v} = \langle \mathbf{R} \rangle t + m\mathbf{g}t,$$

où $\langle \mathbf{R} \rangle$ est la moyenne, en temps t, de la valeur du vecteur **R**. Il est très suggestif de représenter cette relation graphiquement (fig. 56). La figure rend clair que la valeur cherchée de $\langle R \rangle$ est déterminée par la formule $\langle R \rangle t = p \sin \alpha + mgt \cos \alpha$.

Exemple 2. Un homme de masse m_1 se trouve sur un radeau étroit de masse m_2 qui repose à la surface d'un lac. L'homme a effectué un déplacement $\Delta\mathbf{r}'$ par rapport au radeau, puis s'est arrêté. La résistance de l'eau est à négliger. Calculer le déplacement correspondant $\Delta\mathbf{r}_2$ du radeau par rapport à la rive.

Dans le cas considéré, la résultante de toutes les forces extérieures qui agissent sur le système homme-radeau est nulle; c'est pourquoi l'impulsion de ce système ne changera pas, en restant nulle au cours du mouvement:

$$m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = 0,$$

où $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ sont les vitesses de l'homme et du radeau par rapport à la rive. Mais la vitesse de l'homme par rapport à la rive peut être mise sous la forme $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}'$, où $\mathbf{v}'$ est la vitesse de l'homme par rapport au radeau. En éliminant $\mathbf{v}_1$ de ces deux équations, on obtient

$$\mathbf{v}_2 = -\frac{m_1}{m_1+m_2}\mathbf{v}'.$$

Après avoir multiplié les deux membres par dt, on trouve la relation entre les déplacements élémentaires du radeau $d\mathbf{r}_2$ et de l'homme $d\mathbf{r}'$ par rapport au radeau. Il est évident qu'on aura également la même relation pour les déplacements totaux

$$\Delta\mathbf{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1+m_2}\Delta\mathbf{r}'.$$

Il est clair que le déplacement du radeau $\Delta\mathbf{r}_2$ ne dépend pas du caractère du mouvement de l'homme, c'est-à-dire ne dépend pas de la relation $\mathbf{v}'(t)$.

Soulignons encore une fois: la loi de conservation de l'impulsion n'est vérifiée que dans des référentiels galiléens. Ceci, pourtant, ne veut pas dire qu'il n'existe pas des cas lorsque l'impulsion du système se conserve aussi dans des référentiels non galiléens. A cet effet, il suffit que dans l'équation (4.4), vraie également dans les référentiels non galiléens, la force extérieure $\mathbf{F}$ (qui inclut aussi les forces d'inertie) soit nulle. Il est clair que cette situation n'est possible que dans des conditions spéciales. Les cas correspondants sont assez rares et ont un caractère particulier.

Montrons maintenant que si l'impulsion d'un système se conserve dans un référentiel galiléen K, il en sera de même dans tout autre référentiel galiléen K'. Soit dans le système K

$$\sum m_i\mathbf{v}_i = \text{const.}$$

Si K' se déplace par rapport à K à la vitesse $\mathbf{V}$, la vitesse de l'i-ième particule dans K peut être mise sous la forme $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}'_i + \mathbf{V}$, où $\mathbf{v}'_i$ est la vitesse de cette particule dans K'. Alors, l'expression de l'impulsion d'un système peut être réduite à la forme suivante: $\sum m_i\mathbf{v}'_i + \sum m_i\mathbf{V} = \text{const.}$ La deuxième somme de cette égalité ne dépend pas du temps. Or, cela signifie que la première somme dans le référentiel K' ne dépend pas du temps non plus, c'est-à-dire

$$\sum m_i\mathbf{v}'_i = \text{const.}$$

Le résultat obtenu correspond entièrement au principe de la relativité de Galilée d'après lequel les lois de la mécanique sont les mêmes dans tous les référentiels galiléens.

Les raisonnements qui nous ont amenés à la loi de conservation de l'impulsion reposaient entièrement sur la validité des lois de Newton. On supposait, en particulier, que les points matériels d'un système fermé interagissent deux à deux et cette interaction vérifie la troisième loi de Newton. Or, que se passe-t-il dans le cas des systèmes qui ne respectent pas les lois de Newton, par exemple, dans ceux à rayonnement électromagnétique?

La réponse à cette question est donnée par l'expérience qui avec toute la conviction possible montre que pour de tels systèmes aussi, la loi de conservation est vraie. Pourtant, en faisant le bilan de l'impulsion il convient de tenir compte non seulement de l'impulsion des particules, mais encore de celle que possède, comme le montre l'électrodynamique, le champ de rayonnement lui-même.

De cette façon l'expérience montre que la *loi de conservation de l'impulsion* dûment généralisée est une *loi fondamentale de la Nature, qui ne connaît aucune exception.* Mais ainsi comprise elle n'est déjà plus une loi qui se déduit des principes de Newton, elle doit être envisagée comme un principe universel indépendant, basé sur la généralisation des faits d'expérience.

§ 4.2. Centre d'inertie. Système *C*

Centre d'inertie. Tout système de particules possède un point remarquable, le point C, *centre d'inertie* ou *centre des masses*, qui jouit de plusieurs propriétés intéressantes et importantes. Sa position par rapport à l'origine O d'un système de référence donné est caractérisée par le rayon vecteur $\mathbf{r}_C$ défini par la formule suivante

$$\mathbf{r}_C = \frac{1}{m} \sum m_i \mathbf{r}_i, \tag{4.8}$$

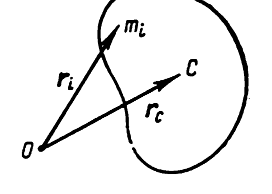


Fig. 57

où m_i et $\mathbf{r}_i$ sont la masse et le rayon vecteur de l'i-ième particule; m, la masse du système tout entier (fig. 57).

Il convient de noter que le centre d'inertie d'un système coïncide avec le centre de pesanteur. Il est vrai que cette affirmation n'est valide que si on admet que dans les limites du système donné le champ de forces de pesanteur peut être considéré comme homogène.

Calculons la vitesse du centre d'inertie dans le référentiel donné. En dérivant (4.8) par rapport au temps, on obtient

$$\mathbf{V}_C = \frac{1}{m} \sum m_i \mathbf{v}_i = \frac{1}{m} \sum \mathbf{p}_i. \tag{4.9}$$

Si la vitesse du centre d'inertie est nulle, on dit que le système en tant qu'un tout unique est au repos. Ceci est une généralisation

naturelle de la notion de repos d'une particule isolée. Quant à la vitesse $\mathbf{V}_C$, elle acquiert le sens de la vitesse du système en tant qu'un tout unique.

Compte tenu de (4.3), la formule (4.9) entraîne que

$$\mathbf{p} = m\mathbf{V}_C, \tag{4.10}$$

c'est-à-dire *l'impulsion d'un système est égale au produit de la masse du système par la vitesse de son centre d'inertie.*

Equation du mouvement du centre d'inertie. La notion de centre d'inertie permet de donner à l'équation (4.4) une autre forme qui s'avère souvent plus commode. A cet effet, il suffit de porter (4.10) dans (4.4) et de tenir compte que la masse d'un système en tant que tel est une constante. Il vient

$$\boxed{m\frac{d\mathbf{V}_C}{dt} = \mathbf{F},} \tag{4.11}$$

où $\mathbf{F}$ est la résultante de toutes les forces extérieures qui agissent sur le système. Ceci est précisément l'*équation du mouvement du centre d'inertie* d'un système, l'une des plus importantes équations de la mécanique. D'après cette équation, *lors du mouvement d'un système de particules son centre d'inertie se déplace comme si toute la masse du système était concentrée en ce point, auquel étaient appliquées toutes les forces extérieures* agissant sur le système. Dans ces conditions, l'accélération du centre d'inertie ne dépend pas du tout des points d'application des forces extérieures.

Ensuite, l'équation (4.11) amène que si $\mathbf{F} \equiv 0$, $d\mathbf{V}_C/dt \equiv 0$, et donc $\mathbf{V}_C = \text{const}$. Tel est en particulier le cas d'un système fermé (dans un référentiel galiléen). D'autre part, si $\mathbf{V}_C = \text{const}$, alors, d'après (4.10), l'impulsion du système $\mathbf{p} = \text{const}$ également.

De la sorte, *si le centre d'inertie d'un système est animé d'un mouvement uniforme et rectiligne, ceci signifie que lors du mouvement son impulsion se conserve.* Bien entendu l'affirmation contraire est également vraie.

Quant à la forme, l'équation (4.11) coïncide avec l'équation fondamentale de la dynamique d'un point matériel et constitue sa généralisation naturelle à un système de particules : l'accélération d'un système en tant qu'un tout unique est proportionnelle à la résultante de toutes les forces extérieures et inversement proportionnelle à la masse globale du système. Rappelons que dans les référentiels non galiléens la résultante de toutes les forces extérieures inclut aussi bien les forces d'interaction avec les corps extérieurs que les forces d'inertie.

Examinons trois exemples de mouvement du centre d'inertie d'un système.

Exemple 1. Montrer comment on peut résoudre le problème de l'homme sur le radeau (cf. exemple 2 de la p. 101) en appliquant la notion d'inertie.

La résistance de l'eau étant négligeable, la résultante de toutes les forces extérieures qui agissent sur le système homme-radeau est nulle. Or. cela signifie que la position du centre d'inertie du système considéré ne changera pas lors du déplacement de l'homme (et du radeau), c'est-à-dire

$$m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 = \text{const},$$

où $\mathbf{r}_1$ et $\mathbf{r}_2$ sont les rayons vecteurs caractéristiques de la position du centre d'inertie de l'homme et du radeau par rapport à un certain point de la rive. Cette égalité conduit à la relation entre les accroissements des vecteurs $\mathbf{r}_1$ et $\mathbf{r}_2$

$$m_1\Delta\mathbf{r}_1 + m_2\Delta\mathbf{r}_2 = 0.$$

Compte tenu des accroissements $\Delta\mathbf{r}_1$ et $\Delta\mathbf{r}_2$ qui sont les déplacements de l'homme et du radeau par rapport à la rive, et du fait que $\Delta\mathbf{r}_1 = \Delta\mathbf{r}_2 + \Delta\mathbf{r}'$, on trouve le déplacement du radeau

$$\Delta\mathbf{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1+m_2}\Delta\mathbf{r}'.$$

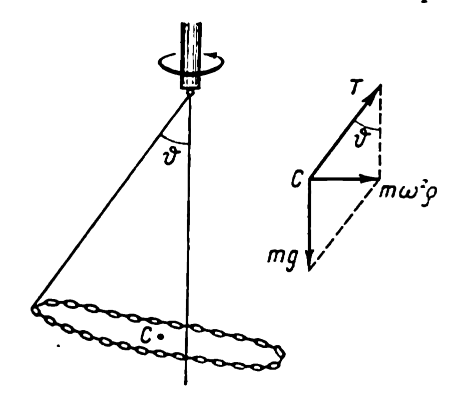


Fig. 58

Exemple 2. Un homme saute d'une tour dans l'eau. Dans le cas général, le caractère du mouvement du sauteur est très compliqué. Pourtant, si la résistance de l'air est négligeable, on peut affirmer que le centre d'inertie du sauteur se déplace suivant une parabole comme un point matériel qui subit l'action d'une force constante $m\mathbf{g}$, où m est la masse de l'homme.

Exemple 3. Une chaînette fermée liée par un fil à l'extrémité de l'axe d'une centrifugeuse tourne uniformément autour de l'axe vertical à la vitesse angulaire ω (fig. 58). Le fil forme avec la verticale un angle ϑ. Quel est le comportement du centre d'inertie de la chaînette?

Il est clair que dans une rotation uniforme le centre d'inertie de la chaînette ne se déplace pas dans le sens vertical. Cela signifie que la composante verticale de la force de tension T du fil compense la force de pesanteur (fig. 58, à droite). Quant à la composante horizontale de la force de tension, elle est constante en module et est dirigée tout le temps vers l'axe de rotation. Il s'ensuit que le point C, centre d'inertie de la chaînette, se déplace suivant un cercle horizontal dont le rayon ρ se calcule sans peine à l'aide de la formule (4.11) mise sous la forme

$$m\omega^2\rho = mg\,tg\,\vartheta,$$

où m est la masse de la chaînette. Le point C se trouve tout le temps entre l'axe de rotation et le fil, comme c'est représenté sur la figure 58.

Système C. Dans les cas fréquents lorsque nous ne nous intéressons qu'au mouvement relatif des particules à l'intérieur d'un système et non au mouvement de son ensemble, le plus avantageux est de recourir à un référentiel où le centre d'inertie est au repos. L'analyse du phénomène se trouve alors sensiblement simplifiée, aussi bien que les calculs.

Un système de référence lié invariablement au centre d'inertie et se déplaçant en translation par rapport aux référentiels galiléens s'appelle *système du centre d'inertie*, ou sommairement, *système C*. Son trait distinctif est que dans ce cas l'impulsion totale d'un système de particules est nulle, ce qui s'ensuit directement de la formule (4.10). Autrement dit, tout système de particules en tant qu'un tout unique repose dans son *système C* à lui.

Pour un système de particules fermé son système C est galiléen; pour un système ouvert, dans le cas général, il est non galiléen.

Cherchons la relation entre les valeurs de l'énergie mécanique dans les référentiels K et C. Commençons par l'énergie cinétique T du système. La vitesse de l'i-ième particule dans K peut être représentée sous la forme $\mathbf{v}_i = \tilde{\mathbf{v}}_i + \mathbf{V}_C$, où $\tilde{\mathbf{v}}_i$ est la vitesse de cette particule dans le système C, et $\mathbf{V}_C$, la vitesse du système C par rapport au référentiel K. On peut alors écrire

$$T = \sum m_i \tilde{v}_i^2/2 = \sum m_i (\tilde{\mathbf{v}}_i + \mathbf{V}_C)^2/2 =$$

$$= \sum m_i \tilde{v}_i^2/2 + \mathbf{V}_C \sum m_i \tilde{\mathbf{v}}_i + \sum m_i \mathbf{V}_C^2/2.$$

Etant donné que dans le système C, $\sum m_i \tilde{\mathbf{v}}_i = 0$, l'expression précédente devient

$$\boxed{T = \tilde{T} + \frac{mV_C^2}{2} = \tilde{T} + \frac{p^2}{2m},} \qquad (4.12)$$

où $\tilde{T} = \sum m_i \tilde{\mathbf{v}}_i^2/2$ est l'énergie cinétique globale des particules dans le système C ; m, la masse du système tout entier; p, son impulsion totale dans le référentiel K.

De la sorte, *l'énergie cinétique d'un système de particules se compose de l'énergie cinétique globale $\tilde{T}$ dans le système C et de l'énergie cinétique associée au mouvement du système de particules en tant qu'un tout unique*. C'est une conclusion importante qui par la suite (lors de l'étude de la dynamique d'un solide, notamment) sera utilisée à plus d'une reprise.

La formule (4.12) entraîne que l'énergie cinétique d'un système de particules est minimale dans le système C ; c'est ce qui constitue encore une de ses particularités. En effet, dans le système C, $\mathbf{V}_C = 0$; donc dans (4.12) il n'y a que $\tilde{T}$ qui reste.

Maintenant passons à l'énergie mécanique totale E. Puisque l'énergie potentielle propre U du système ne dépend que de la configuration du système, la valeur de U est la même dans tous les référentiels. En ajoutant U aux premier et deuxième membres de l'égalité (4.12), on obtient la formule de transformation de l'éner-

gie mécanique totale lors du passage du référentiel K au système C:

$$E=\tilde{E}+\frac{mV_C^2}{2}=\tilde{E}+\frac{p^2}{2m}. \qquad (4.13)$$

L'énergie $\tilde{E}=\tilde{T}+U$ s'appelle *énergie mécanique interne* du système.

Exemple. Sur un plan horizontal lisse reposent deux rondelles de masse m chacune liées entre elles par un ressort impondérable. A l'une des rondelles on communique une vitesse initiale v_0 suivant la figure 59. Quelle est l'énergie mécanique interne $\tilde{E}$ de ce système au cours du mouvement?

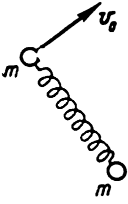


Fig. 59

Le plan étant lisse le système se comportera au cours du mouvement comme un système fermé. Son énergie mécanique totale E et son impulsion globale $\mathbf{p}$ se conserveront donc, tout en restant égales aux valeurs qu'elles avaient à l'instant initial, c'est-à-dire $E=mv_0^2/2$; $p=mv_0$. En portant ces valeurs dans la formule (4.13), on obtient

$$\tilde{E}=E-p^2/(2\cdot 2m)=mv_0^2/4.$$

On réalise sans peine que l'énergie interne $\tilde{E}$ est liée à la rotation et à l'oscillation du système considéré; de plus, à l'instant initial, $\tilde{E}$ était égale seulement à l'énergie du mouvement rotatif.

Si le système de particules est *fermé* et s'il est le siège des processus liés à la variation de l'énergie mécanique totale, (4.13) entraîne que $\Delta E=\Delta\tilde{E}$, c'est-à-dire l'accroissement de l'énergie mécanique totale par rapport à un référentiel galiléen arbitraire est égal à l'accroissement de l'énergie mécanique *interne*. Dans ces conditions, l'énergie cinétique conditionnée par le mouvement du système de particules en tant qu'un tout unique, ne change pas, puisque pour un système fermé $\mathbf{p}=\text{const}$.

En particulier, si un système fermé est *conservatif*, son énergie mécanique totale se conserve dans tous les référentiels galiléens. Cette conclusion est parfaitement conforme au principe de relativité de Galilée.

Système de deux particules. Supposons que les masses des particules sont m_1 et m_2, et leurs vitesses dans le référentiel K, $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ respectivement. Cherchons les expressions qui déterminent leurs impulsions et l'énergie cinétique globale dans le système C.

L'impulsion de la première particule dans le système C

$$\tilde{\mathbf{p}}_1=m_1\tilde{\mathbf{v}}_1=m_1(\mathbf{v}_1-\mathbf{V}_C),$$

où $\mathbf{V}_C$ est la vitesse du centre d'inertie (du système C) dans K. Après avoir porté dans cette formule l'expression (4.9) de $\mathbf{V}_C$, on obtient

$$\tilde{\mathbf{p}}_1=\mu(\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2),$$

où μ est ce qu'on appelle *masse réduite* du système:

$$\boxed{\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2).} \tag{4.14}$$

D'une façon analogue, l'impulsion de la deuxième particule dans le système C

$$\tilde{\mathbf{p}}_2 = \mu(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1).$$

De cette façon les impulsions de deux particules dans le système C sont les mêmes en module et opposées en direction, le module de l'impulsion de chaque particule étant

$$\boxed{\tilde{p} = \mu v_{\text{rel}},} \tag{4.15}$$

où $v_{\text{rel}} = |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|$ est la vitesse d'une particule par rapport à l'autre.

Maintenant examinons l'énergie cinétique. L'énergie cinétique globale des deux particules dans le système C

$$\tilde{T} = \tilde{T}_1 + \tilde{T}_2 = \tilde{p}^2/2m_1 + \tilde{p}^2/2m_2.$$

Puisque d'après (4.14), $1/m_1 + 1/m_2 = 1/\mu$, il vient

$$\boxed{\tilde{T} = \tilde{p}^2/2\mu = \mu v_{\text{rel}}^2/2.} \tag{4.16}$$

Si les deux particules interagissent entre elles, leur énergie mécanique totale dans le système C

$$\tilde{E} = \tilde{T} + U, \tag{4.17}$$

où U est l'énergie potentielle d'interaction des particules données.

Les formules obtenues jouent un grand rôle dans l'étude des collisions des particules.

§ 4.3. Collision de deux particules

Dans ce paragraphe nous examinerons les différents cas de collision de deux particules, en utilisant comme outil d'exploration seulement les lois de conservation de l'impulsion et de l'énergie. Nous allons voir que les lois de conservation permettent de tirer tout une série de conclusions très générales et importantes sur les propriétés d'un processus donné sans aucun rapport avec une loi d'interaction concrète.

En même temps nous montrerons quels avantages présente le système C, dont l'application, comme nous allons le voir, simplifie sensiblement de nombreux calculs et l'analyse du processus.

Bien que nous traitions de la collision des *particules*, il faut dire tout de suite que tous les raisonnements et conclusions qui

suivent se rapportent dans la même mesure aux collisions de *corps quelconques*. Il faut seulement retenir qu'au lieu de la vitesse d'une particule, il faut prendre celle du centre d'inertie de chaque corps, et au lieu de l'énergie cinétique d'une particule, celle des parties de l'énergie cinétique de chaque corps, qui caractérise son mouvement en tant qu'un tout unique.

Dans ce qui suit nous admettrons que

1) le référentiel K initial est galiléen;

2) le système de deux particules est fermé;

3) les impulsions (et les vitesses) des particules avant et après la collision correspondent à des distances assez grandes entre elles, alors que l'énergie d'interaction potentielle peut être négligée.

Les grandeurs relatives au système après la collision seront marquées d'un trait, alors que les grandeurs dans le système C, d'un tilde au-dessus du symbole.

On distingue trois types de collisions de particules: parfaitement inélastique, parfaitement élastique et le cas d'inélasticité intermédiaire.

Collision inélastique parfaite. C'est une collision dont il résulte le « collage » des particules qui poursuivent leur mouvement comme un tout entier. Soient deux particules de masses m_1 et m_2 dont les vitesses avant la collision étaient $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ (dans le référentiel K). Après la collision il se forme une particule de masse $m_1 + m_2$, ce qui s'ensuit directement de l'additivité de la masse dans la mécanique newtonienne. La vitesse $\mathbf{v}'$ de la particule créée peut être calculée à partir de la loi de conservation de l'impulsion

$$(m_1 + m_2)\,\mathbf{v}' = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2.$$

Il est clair que la vitesse $\mathbf{v}'$ est égale à la vitesse du centre d'inertie du système.

Ce processus acquiert l'expression la plus simple dans le système C: avant la collision les deux particules se déplacent l'une à la rencontre de l'autre avec les mêmes impulsions $\tilde{p}$, et après la collision, la particule créée devient fixe. L'énergie cinétique globale $\tilde{T}$ des particules se transforme entièrement en énergie interne Q de la particule créée, c'est-à-dire $\tilde{T} = Q$. On en tire compte tenu de la formule (4.16)

$$Q = \frac{\mu v_{\text{rel}}^2}{2} = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2.$$

De la sorte, la grandeur Q de la paire de particules donnée dépend seulement de leur vitesse relative.

Collision élastique parfaite. C'est une collision qui n'entraîne pas le changement de l'énergie interne des particules, et par suite, ne change pas l'énergie cinétique du système. Examinons deux cas particuliers: collisions élastiques de front et collisions latérales.

1. *Collision de front.* C'est le cas où les particules avant et après la collision se déplacent suivant une même droite. Supposons que dans le référentiel K avant la collision les vitesses des particules étaient $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ (les particules se déplacent l'une à la rencontre de l'autre, ou l'une rattrapant l'autre). Quelles sont les vitesses de ces particules après la collision?

Examinons d'abord ce processus dans le système C, où les impulsions de deux particules avant et après la collision étaient les

Fig. 60

mêmes en module et opposées en direction (fig. 60). Plus même, puisque l'énergie cinétique globale des particules avant et après la collision est la même, tout comme leur masse réduite, la collision fera que d'après (4.16) l'impulsion de chaque particule ne renversera que sa direction sans changer en module, c'est-à-dire $\tilde{\mathbf{p}}_i' = -\tilde{\mathbf{p}}_i$, où $i = 1, 2$. Ceci se rapporte également à la vitesse de chaque particule dans le système C

$$\tilde{\mathbf{v}}_i' = -\tilde{\mathbf{v}}_i.$$

Maintenant calculons la vitesse de chaque particule après la collision dans le référentiel K. A cet effet utilisons les formules de transformation des vitesses lors du passage du système C au référentiel K, ainsi que l'égalité précédente. Il vient

$$\mathbf{v}_i' = \mathbf{V}_C + \tilde{\mathbf{v}}_i' = \mathbf{V}_C - \tilde{\mathbf{v}}_i = \mathbf{V}_C - (\mathbf{v}_i - \mathbf{V}_C) = 2\mathbf{V}_C - \mathbf{v}_i,$$

où $\mathbf{V}_C$ est la vitesse du centre d'inertie (du système C) dans le référentiel K; cette vitesse est déterminée par la formule (4.9). Ainsi, après sa collision, dans le référentiel K la vitesse de l'i-ième particule s'écrit

$$\mathbf{v}_i' = 2\mathbf{V}_C - \mathbf{v}_i, \tag{4.18}$$

où $i = 1, 2$. Dans les projections sur un axe arbitraire des x cette égalité devient

$$v_{ix}' = 2V_{Cx} - v_{ix}. \tag{4.19}$$

En particulier, si les masses des particules sont les mêmes, on voit sans peine que sous l'effet de la collision les particules échangent simplement des vitesses, c'est-à-dire $\mathbf{v}_1' = \mathbf{v}_2$ et $\mathbf{v}_2' = \mathbf{v}_1$.

2. *Collision latérale.* Bornons-nous au cas où une des particules *est au repos* avant la collision. Supposons que dans le référentiel K une particule de masse m_1 d'impulsion p_1 a subi une collision

élastique latérale avec une particule au repos de masse m_2. Quelles sont les impulsions possibles de ces particules après la collision?

Examinons ce processus également dans le système C. Ici, tout comme dans le cas précédent, les impulsions des deux particules à un instant quelconque avant et après la collision sont les mêmes en module et opposées en direction. Qui plus est, l'impulsion de chaque particule ne change pas en module sous l'effet de la collision, c'est-à-dire

$$\tilde{p}' = \tilde{p}.$$

Pourtant, la direction de l'écartement des particules sera maintenant différente. Elle composera avec la direction initiale du mouvement un certain angle $\tilde{\vartheta}$ (fig. 61), fonction de l'interaction des particules et de leur position relative lors de la collision.

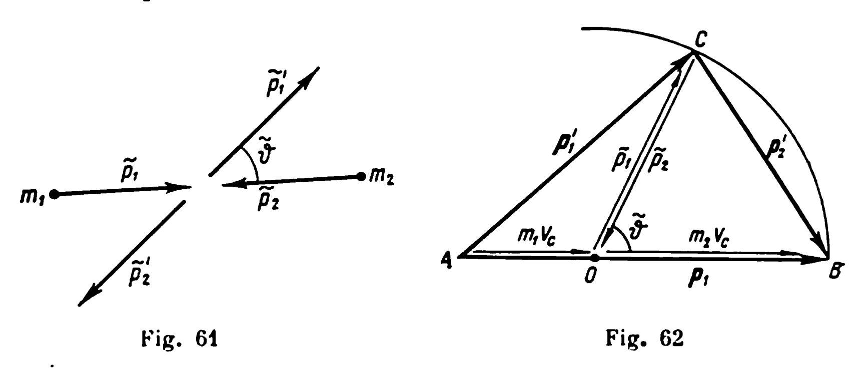


Fig. 61 Fig. 62

Cherchons maintenant l'impulsion de chaque particule dans K après la collision. A l'aide des formules de transformation des vitesses lors du passage du système C au système K, nous obtiendrons

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1' &= m_1\mathbf{v}_1' = m_1(\mathbf{V}_C + \tilde{\mathbf{v}}_1') = m_1\mathbf{V}_C + \tilde{\mathbf{p}}_1'; \\ \mathbf{p}_2' &= m_2\mathbf{v}_2' = m_2(\mathbf{V}_C + \tilde{\mathbf{v}}_2') = m_2\mathbf{V}_C + \tilde{\mathbf{p}}_2', \end{aligned} \tag{4.20}$$

où $\mathbf{V}_C$ est la vitesse du système C par rapport à K.

En additionnant séparément les premiers et deuxièmes membres de ces égalités, compte tenu du fait que $\tilde{\mathbf{p}}_1' = -\tilde{\mathbf{p}}_2'$, on obtient

$$\mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2' = (m_1 + m_2)\mathbf{V}_C = \mathbf{p}_1.$$

comme il se doit conformément à la loi de conservation de l'impulsion.

Construisons maintenant ce qu'on appelle le *diagramme vectoriel des impulsions*. Représentons d'abord le vecteur $\mathbf{p}_1$ par le segment AB (fig. 62), puis les vecteurs $\mathbf{p}_1'$ et $\mathbf{p}_2'$ dont chacun constitue d'après (4.20) une somme de deux vecteurs.

Notons que ce diagramme est valide indépendamment de l'angle $\tilde{\vartheta}$. Il s'ensuit que le point C (fig. 62) peut se trouver seulement sur un cercle de rayon $\tilde{p}$ de centre en O qui divise le segment AB en deux parties sous le rapport $AO : OB = m_1 : m_2$. Bien plus: dans le cas considéré (une particule de masse m_2 est au repos avant la collision) ce cercle passe par le point B qui est une extrémité du vecteur $\mathbf{p}_1$, puisque le segment $OB = \tilde{p}$. En effet,

$$OB = m_2 V_C = m_2 \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2},$$

où v_1 est la vitesse de la particule incidente. Vu que dans notre cas $v_1 = v_{\text{rel}}$, d'après (4.14) et (4.15),

$$OB = \mu v_{\text{rel}} = \tilde{p}.$$

De la sorte, pour construire le diagramme vectoriel des impulsions qui correspond à la collision élastique de deux particules (dont l'une était initialement au repos) il faut

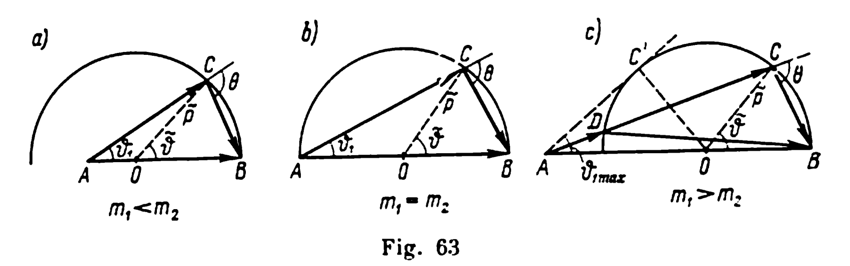


Fig. 63

1) représenter d'abord le segment AB égal à l'impulsion p_1 de la particule incidente;

2) puis mener par le point B qui est l'extrémité du vecteur $\mathbf{p}_1$ un cercle de rayon

$$\tilde{p} = \mu v_{\text{rel}} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} p_1,$$

dont le centre en O divise le segment AB en deux parties sous le rapport $AO : OB = m_1 : m_2$.

Ce cercle est le lieu géométrique des points de toutes les positions possibles du sommet C du triangle des impulsions ABC, dont les côtés AC et BC représentent des impulsions éventuelles des particules après la collision (dans K).

Suivant le rapport entre les masses des particules le point A qui est l'origine du vecteur $\mathbf{p}_1$ peut se trouver à l'intérieur, sur le cercle ou en dehors de ce dernier (fig. 63). Dans ces conditions, dans tous les trois cas l'angle $\tilde{\vartheta}$ peut prendre toutes les valeurs de 0 à π. Les valeurs possibles de l'angle de diffusion de la particule incidente

ϑ_1 et de l'angle d'écartement des particules θ seront les suivantes:

a) $m_1 < m_2$ $\quad 0 < \vartheta_1 \leqslant \pi$ $\quad \theta > \pi/2$
b) $m_1 = m_2$ $\quad 0 < \vartheta_1 \leqslant \pi/2$ $\quad \theta = \pi/2$
c) $m_1 > m_2$ $\quad 0 < \vartheta_1 \leqslant \vartheta_{1max}$ $\quad \theta < \pi/2$

Ici ϑ_{1max} est l'*angle limite*. Il est déterminé comme suit

$$\sin \vartheta_{1max} = m_2/m_1, \tag{4.21}$$

qui s'ensuit directement de la figure 63, *c*: $\sin \vartheta_{1max} = OC'/AO = OB/AO = m_2/m_1$.

De plus, on découvre encore un fait intéressant. Dans le dernier cas ($m_1 > m_2$) la diffusion de la particule m_1 sous le même angle ϑ_1 est possible aussi bien avec l'impulsion AC qu'avec l'impulsion AD (fig. 63, *c*), c'est-à-dire dans ce cas la solution est ambiguë. Il en est de même pour la particule m_2.

Enfin, ce même diagramme vectoriel permet de trouver la relation entre les angles ϑ_1 et $\tilde{\vartheta}$:

$$\operatorname{tg} \vartheta_1 = \frac{\sin \tilde{\vartheta}}{\cos \tilde{\vartheta} + m_1/m_2} \cdot \tag{4.22}$$

Les lois de conservation de l'impulsion et de l'énergie n'offrent plus à elles seules de renseignements à ce sujet.

Ainsi on peut constater que ces lois permettent en effet de tirer tout une série de conclusions de grand intérêt sur les propriétés du processus considéré. Par ailleurs, un fait particulièrement important est que ces propriétés ont un caractère général, c'est-à-dire ne dépendent absolument pas de l'allure des interactions entre les particules.

Il convient pourtant d'attirer l'attention sur un fait de principe. Le diagramme vectoriel des impulsions qui a à sa base les lois de conservation de l'impulsion et de l'énergie, tout en donnant une idée exhaustive de tous les cas éventuels d'écartement des particules après la collision (résultat très important de par lui-même), ne dit absolument rien sur *celui* de ces cas concrets qui est réalisé pratiquement. Pour l'établir il faut examiner de plus près le processus de collision à l'aide des équations du mouvement. Il devient alors clair par exemple, que l'angle de diffusion ϑ_1 de la particule incidente dépend du caractère d'interaction des particules en collision et de ce qu'on appelle le *paramètre d'impact* *; quant à l'ambiguïté de la solution dans le cas $m_1 > m_2$, elle s'explique par le fait qu'un même angle de diffusion ϑ_1 peut s'obtenir avec deux valeurs du

* Le *paramètre d'impact* est la distance entre la droite le long de laquelle est dirigée l'impulsion de la particule incidente et la particule avec laquelle la collision a lieu.

paramètre d'impact, et ceci indépendamment de l'expression de l'interaction des particules.

C'est là un fait de principe caractéristique des lois de conservation en général. Ces lois ne répondent jamais et ne peuvent pas donner de réponse univoque à la question, à savoir: *que* se passera-t-il? Mais si en partant de certaines autres considérations on peut indiquer *ce qui* précisément doit avoir lieu, alors ces lois permettent de dire *comment* cela doit se produire.

Collision inélastique. C'est une collision dont il résulte que l'énergie interne des particules (ou de l'une d'elles) qui s'écartent change, et par conséquent, l'énergie cinétique globale du système change elle aussi. L'accroissement correspondant de l'énergie cinétique d'un système est noté habituellement par Q. Suivant le signe de Q une collision inélastique est dite *exoénergique* ($Q > 0$) ou *endoénergique* ($Q < 0$). Dans le premier cas l'énergie cinétique augmente, dans le deuxième, elle diminue. Il est clair que dans le cas d'une collision élastique $Q = 0$.

Notre tâche consiste à trouver les impulsions possibles des particules après une collision inélastique.

Le plus simple est de résoudre ce problème dans le système C. Par condition, dans le processus considéré, l'accroissement de l'énergie cinétique globale

$$\tilde{T}' - \tilde{T} = Q. \tag{4.23}$$

Puisque dans notre cas $\tilde{T}' \neq \tilde{T}$, cela signifie d'après (4.16) que les impulsions des particules après la collision changent en module. L'impulsion $\tilde{p}'$ de chaque particule après la collision se calcule sans peine en remplaçant $\tilde{T}'$ de (4.23) par l'expression $\tilde{T}' = \tilde{p}'^2/2\mu$. Il en résulte

$$\tilde{p}' = \sqrt{2\mu(\tilde{T} + Q)}\,. \tag{4.24}$$

Examinons maintenant le même problème dans le référentiel K, où une particule de masse m_1 et d'impulsion $\mathbf{p}_1$ subit la collision avec une particule *au repos* de masse m_2. Pour déterminer les cas éventuels des écarts des particules après la collision il est avantageux d'utiliser également le diagramme vectoriel des impulsions. Sa construction est analogue à celle qui a été effectuée pour le cas d'une collision élastique. L'impulsion de la particule incidente $p_1 = AB$ (fig. 64) est divisée par le point O en deux parties proportionnelles aux masses des particules ($AO : OB = m_1 : m_2$). Du point O on mène ensuite un cercle de rayon $\tilde{p}'$ déterminé par la formule (4.24). Ce cercle est précisément le lieu géométrique des points de toutes les positions possibles du sommet C du triangle des impulsions ABC, dont les côtés AC et CB sont égaux aux impulsions correspondantes après la collision.

Notons qu'à la différence de la collision élastique, le point B, extrémité du vecteur $\mathbf{p}_1$, ne repose plus sur le cercle: pour $Q > 0$, ce point se trouve à l'intérieur du cercle, et pour $Q < 0$, en dehors de celui-ci. La figure 64 correspond à ce dernier cas, celui de la collision endoénergique.

Seuil. Il existe de nombreuses collisions inélastiques dans lesquelles l'énergie interne des particules n'est susceptible de varier que d'une valeur bien *déterminée* dépendant seulement des propriétés des particules elles-mêmes (telles sont, par exemple, les collisions inélastiques des atomes et des molécules). Malgré cela, les collisions exoénergiques ($Q > 0$) peuvent se produire avec une énergie cinétique aussi petite que l'on veut de la particule incidente. Quant aux processus endoénergiques, ils possèdent dans ce cas un *seuil*. On appelle seuil l'énergie cinétique minimale d'une particule incidente à partir de laquelle le processus donné devient possible du point de vue énergétique.

Résumons: supposons qu'il nous faut réaliser une collision endoénergique où l'énergie interne des particules est susceptible d'obtenir un accroissement non inférieur à une certaine valeur $|Q|$. Sous quelle condition un tel processus devient possible?

Ce problème se résout le plus aisément dans le système C, où l'énergie cinétique globale $\tilde{T}$ des particules avant la collision ne doit pas être en tout cas inférieure à $|Q|$, c'est-à-dire $\tilde{T} \geqslant |Q|$. Il s'ensuit qu'il existe une valeur minimale $\tilde{T}_{\min} = |Q|$ à laquelle l'énergie cinétique du système sera complètement absorbée par l'augmentation de l'énergie interne des particules; et dans le système C après la collision les particules *s'immobiliseront*.

Examinons cette même question dans le système de référence K, où la particule de masse m_1 percute une particule *au repos* de masse m_2. Puisque avec $\tilde{T}_{\min}$ dans le système C les particules s'arrêtent après la collision, dans le système K, l'énergie cinétique seuil $T_{1\,\text{seuil}}$ de la particule incidente étant correspondante, les deux particules après la collision se déplaceront comme un *tout unique*; l'impulsion totale sera alors égale à l'impulsion $\mathbf{p}_1$ de la particule incidente, et l'énergie cinétique à $p_1^2/2(m_1+m_2)$. Donc

$$T_{1\,\text{seuil}} = |Q| + p_1^2/2(m_1+m_2).$$

Et puisque $T_{1\,\text{seuil}} = p_1^2/2m_1$, en éliminant p_1^2 de ces deux équations, on obtient

$$T_{1\,\text{seuil}} = \frac{m_1+m_2}{m_2}|Q|. \tag{4.25}$$

Ceci est justement l'énergie cinétique seuil de la particule incidente, à partir de laquelle le processus endoénergique donné devient possible du point de vue énergétique.

Notons que la formule (4.25) joue un grand rôle, surtout en physique atomique et nucléaire. On l'emploie aussi bien pour déterminer le seuil des processus endoénergiques différents, que la valeur de l'énergie $|Q|$ correspondante.

A titre de conclusion considérons un exemple qui présente au fond un modèle de collision endoénergique (cf. également problèmes 4.5 et 4.8).

Exemple. Sur un plan horizontal lisse repose une petite rondelle de masse m et un monticule lisse de masse M et d'hauteur h (fig. 65). Quelle vitesse minimale faut-il communiquer à la rondelle pour qu'elle puisse surmonter ce monticule?

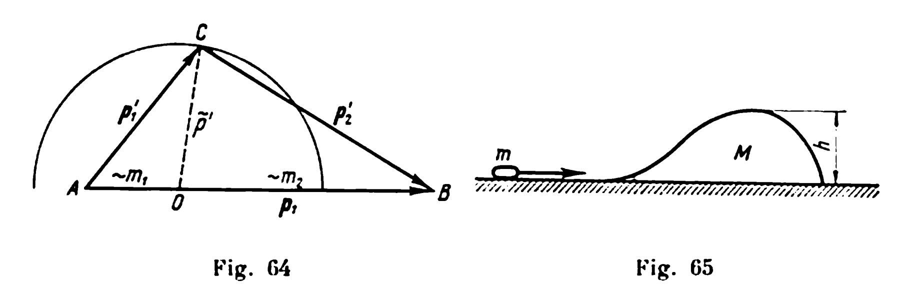


Fig. 64 Fig. 65

Il est clair que la vitesse de la rondelle doit au moins être telle qu'elle puisse monter au sommet du monticule pour se déplacer avec le monticule comme un tout unique. Une partie de l'énergie cinétique du système sera absorbée alors par l'accroissement de l'énergie potentielle $\Delta U = mgh$. Considérons que c'est un processus endoénergique, où $|Q| = \Delta U$. Alors, d'après la formule (4.25)

$$mv_{\text{seuil}}^2/2 = mgh\,(m+M)/M,$$

d'où

$$v_{\text{seuil}} = \sqrt{2\,(1+m/M)\,gh}\,.$$

§ 4.4. Mouvement d'un corps de masse variable

Il existe de nombreux cas lorsque la masse d'un corps varie lors du mouvement par suite de la séparation ou de l'addition continues de matière (fusée, avion à réaction, plate-forme chargée en mouvement, etc.).

Le problème consiste à établir l'équation du mouvement d'un tel corps.

Examinons la solution de ce problème pour un point matériel que nous appellerons sommairement corps. Supposons qu'à un certain instant t la masse du corps A en mouvement est égale à m, alors que la masse adjointe ou séparable a une vitesse **u** par rapport au corps donné.

Introduisons un référentiel galiléen K auxiliaire, dont la vitesse est la même que celle du corps A à l'instant T *donné*. Cela signifie que dans K à l'instant t le corps A est au repos.

Supposons ensuite que dans l'intervalle de temps entre t et $t + dt$ le corps A acquiert dans K l'impulsion $m d\mathbf{v}$. Le corps A reçoit cette impulsion d'abord par adjonction (séparation) de la masse δm qui apporte (emporte) l'impulsion $\delta m \cdot \mathbf{u}$, et puis par l'action de la force **F** de la part des corps environnants et du champ de forces. Ainsi, on peut écrire que

$$m d\mathbf{v} = \mathbf{F}\, dt \pm \delta m \cdot \mathbf{u},$$

où le signe plus correspond à l'adjonction de la masse, et le signe moins, à sa séparation. Ces deux cas peuvent être réunis en présentant $\pm\delta m$ sous la forme d'accroissement dm de la masse du corps A (en effet, dans le cas de l'adjonction de la masse $dm = +\delta m$, et dans celui de sa séparation, $dm = -\delta m$). L'équation précédente devient alors

$$m d\mathbf{v} = \mathbf{F}\, dt + dm \cdot \mathbf{u}.$$

En divisant cette expression par dt, il vient

$$\boxed{m \frac{dv}{dt} = \mathbf{F} + \frac{dm}{dt} \mathbf{u},} \tag{4.26}$$

où **u** est la vitesse de la matière adjointe (séparée) par rapport au corps considéré.

Ceci est l'*équation fondamentale de la dynamique du point matériel à masse variable*. On l'appelle aussi *équation de Méchtcherski*. Obtenue dans un référentiel galiléen, cette équation en vertu du principe de relativité est vraie pour un référentiel galiléen quelconque. Notons que si le référentiel est non galiléen, par effort **F** il faut entendre la résultante aussi bien des forces d'interaction du corps donné avec les corps environnants, que des forces d'inertie.

Le dernier terme de l'équation (4.26) porte le nom de *réaction*: $\mathbf{R} = (dm/dt)\, \mathbf{u}$. Cette force apparaît par suite de l'action sur le corps donné de la masse adjointe (ou séparée). Si la masse est adjointe, $dm/dt > 0$ et le vecteur **R** coïncide en direction avec le vecteur **u**; mais si la masse est séparée, $dm/dt < 0$ et le vecteur **R** est opposé en direction au vecteur **u**.

L'équation de Méchtcherski coïncide quant à la forme avec l'équation fondamentale de la dynamique d'un point matériel de masse constante: son premier membre est le produit de la masse du corps par l'accélération; son deuxième membre représente les forces qui agissent sur le corps, y compris la réaction. Pourtant, dans le cas d'une masse variable, il est impossible de placer la masse m sous le signe de dérivation et de représenter le premier membre de l'équation comme une dérivée par rapport au temps de l'impulsion, puisque $m d\mathbf{v}/dt \neq d\,(m\mathbf{v})/dt$.

Portons notre attention sur deux cas particuliers.

1. Si $\mathbf{u} = 0$, c'est-à-dire si la masse est ajoutée ou séparée sans vitesse par rapport au corps, alors $\mathbf{R} = 0$, et l'équation (4.26) devient :

$$m(t)\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}, \tag{4.27}$$

où $m(t)$ est la masse du corps à l'instant donné. Cette équation détermine, par exemple, le mouvement d'une plate-forme d'où s'écoule le sable (cf. problème 4.10, point 1).

2. Si $\mathbf{u} = -\mathbf{v}$, c'est-à-dire si la masse adjointe est fixe dans le système de référence retenu, ou si la masse séparée devient fixe dans ce système, l'équation (4.26) se met sous une autre forme

$$m\,(d\mathbf{v}/dt) + (dm/dt)\,\mathbf{v} = \mathbf{F}$$

ou

$$d(m\mathbf{v})/dt = \mathbf{F}. \tag{4.28}$$

Autrement dit, dans ce cas particulier, et seulement dans ce cas, l'action de la force $\mathbf{F}$ détermine la variation de l'*impulsion* d'un corps à masse variable. Le cas donné est réalisé, par exemple, lors du mouvement d'une plate-forme chargée d'une matière pulvérulente à partir d'une trémie fixe (cf. problème 4.10, point 2).

Voici un exemple sur l'application de l'équation de Méchtcherski.

Exemple. Une fusée se déplace dans un référentiel galiléen K en l'absence de champ de forces extérieur, et ceci de façon que le jet de gaz s'échappe à une vitesse constante $\mathbf{u}$ par rapport à la fusée. Trouver la relation entre la vitesse de la fusée et sa masse m, si à l'instant du départ sa masse était m_0.

Dans le cas considéré $\mathbf{F} = 0$ et l'équation (4.26) entraîne

$$d\mathbf{v} = \mathbf{u}\; dm/m.$$

En intégrant cette expression compte tenu des conditions initiales, on obtient

$$\mathbf{v} = -\mathbf{u} \ln (m_0/m), \tag{1}$$

où le signe moins montre que le vecteur $\mathbf{v}$ (vitesse de la fusée) est opposé en direction au vecteur $\mathbf{u}$. Il est donc clair que dans le cas considéré ($\mathbf{u}$ = const), la vitesse de la fusée ne dépend pas de la durée de combustion : $\mathbf{v}$ n'est déterminée que par le rapport entre la masse initiale m_0 de la fusée et sa masse restante m.

Notons que si toute la masse du combustible était projetée instantanément à la vitesse $\mathbf{u}$ par rapport à la fusée, la vitesse de cette dernière serait différente. En effet, si au début la fusée était au repos dans le référentiel galiléen retenu et après la projection simultanée du combustible tout entier avait acquis la vitesse $\mathbf{v}$, la loi de conservation de l'impulsion du système fusée-combustible entraîne

$$0 = m\mathbf{v} + (m_0 - m)(\mathbf{u} + \mathbf{v}),$$

où $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ est la vitesse du combustible par rapport au référentiel donné. Il s'ensuit que

$$\mathbf{v} = -\mathbf{u}\,(1 - m/m_0). \tag{2}$$

Dans ce cas la vitesse $\mathbf{v}$ de la fusée s'avère plus faible que dans le cas précédent (pour les mêmes valeurs du rapport m_0/m). On peut s'en convaincre sans peine en comparant le caractère de la relation entre $\mathbf{v}$ et m_0/m dans les deux cas. Dans le premier cas (lorsque l'écoulement de la matière est continu), avec la crois-

sance de m_0/m la vitesse **v** de la fusée croît indéfiniment d'après (1), alors que dans le deuxième (lorsque la matière est éjectée instantanément), la vitesse **v** tend d'après (2) à la limite égale à $-\mathbf{u}$.

Problèmes du chapitre 4

● 4.1. Une particule se déplace avec l'impulsion $\mathbf{p}(t)$ sous l'action de la force $\mathbf{F}(t)$. Soient **a** et **b**, des vecteurs constants; de plus, $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$. En admettant que

1) $\mathbf{p}(t) = \mathbf{a} + t(1 - \alpha t)\mathbf{b}$, où α est une constante positive, trouver le vecteur **F** aux instants lorsque $\mathbf{F} \perp \mathbf{p}$;

2) $\mathbf{F}(t) = \mathbf{a} + 2t\mathbf{b}$ et $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_0$, où $\mathbf{p}_0$ est un vecteur opposé en direction au vecteur **a**, trouver le vecteur **p** à l'instant t_0, lorsqu'il sera tourné à 90° par rapport au vecteur $\mathbf{p}_0$.

Solution. 1. La force $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt = (1 - 2\alpha t)\mathbf{b}$, c'est-à-dire le vecteur **F** est toujours perpendiculaire au vecteur **a**. Par conséquent, le vecteur **F** sera perpendiculaire au vecteur **p** aux instants où le coefficient affecté à **b** dans l'expression de $\mathbf{p}(t)$ s'annule. On en tire $t_1 = 0$ et $t_2 = 1/\alpha$; les valeurs correspondantes du vecteur **F** sont

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{b}; \qquad \mathbf{F}_2 = -\mathbf{b}.$$

2. L'accroissement du vecteur **p** en un intervalle de temps dt est $d\mathbf{p} = -\mathbf{F}\,dt$. En intégrant cette équation compte tenu des conditions initiales, on trouve

$$\mathbf{p} - \mathbf{p}_0 = \int_0^t \mathbf{F}\,dt = \mathbf{a}t + \mathbf{b}t^2,$$

Fig. 66

où par condition, $\mathbf{p}_0$ est opposé au vecteur **a**. Le vecteur **p** sera perpendiculaire au vecteur $\mathbf{p}_0$ à l'instant t_0, lorsque $at_0 = p_0$. A cet instant $\mathbf{p} = (p_0/a)^2\,\mathbf{b}$.

● 4.2. Une corde est passée par une poulie (fig. 66); l'une des extrémités de la corde porte un escalier avec un homme A, et l'autre, un poids de masse M qui l'équilibre. L'homme dont la masse est m effectue un déplacement en haut $\Delta\mathbf{r}'$ par rapport à l'escalier, puis s'arrête. En négligeant les masses de la poulie et de la corde, ainsi que le frottement dans l'axe de la poulie, trouver le déplacement du centre d'inertie de ce système.

Solution. Au début tous les corps du système étaient au repos et l'accroissement de leurs impulsions lors du mouvement était donc égal aux impulsions elles-mêmes. La tension de la corde à gauche et à droite est la même; donc, à chaque instant les impulsions du poids ($\mathbf{p}_1$) et de l'échelle avec l'homme ($\mathbf{p}_2$) sont égales, c'est-à-dire $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2$, ou

$$M\mathbf{v}_1 = m\mathbf{v} + (M - m)\,\mathbf{v}_2,$$

où $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}$ et $\mathbf{v}_2$ sont respectivement les vitesses du poids et de l'homme avec l'échelle. Compte tenu du fait que $\mathbf{v}_2 = -\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v} = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}'$, où $\mathbf{v}'$ est la vitesse de l'homme par rapport à l'échelle, on obtient

$$\mathbf{v}_1 = (m/2M)\,\mathbf{v}'. \tag{1}$$

D'autre part, l'impulsion du système tout entier

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 2\mathbf{p}_1, \text{ ou } 2M\mathbf{V}_C = 2M\mathbf{v}_1,$$

où $\mathbf{V}_C$ est la vitesse du centre d'inertie du système. On en tire compte tenu de (1)

$$\mathbf{V}_C = \mathbf{v}_1 = (m/2M)\,\mathbf{v}'.$$

Enfin, le déplacement cherché

$$\Delta \mathbf{r}_C = \int \mathbf{V}_C dt = (m/2M) \int \mathbf{v}' dt = (m/2M)\, \Delta \mathbf{r}'.$$

Un *autre mode* de résolution est fondé sur l'utilisation d'une propriété du centre d'inertie. Dans le référentiel lié à l'axe de la poulie, la position du centre d'inertie du système donné est caractérisée par le rayon vecteur

$$\mathbf{r}_C = [M\mathbf{r}_1 + (M - m)\,\mathbf{r}_2 + m\mathbf{r}_3]/2M,$$

où $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ sont les rayons vecteurs des centres d'inertie de la charge M, de l'échelle et de l'homme par rapport à un certain point O du référentiel considéré. On en tire le déplacement du centre d'inertie $\Delta \mathbf{r}_C$

$$\Delta \mathbf{r}_C = [M\Delta \mathbf{r}_1 + (M - m)\,\Delta \mathbf{r}_2 + m\Delta \mathbf{r}_3]/2M,$$

où $\Delta \mathbf{r}_1$, $\Delta \mathbf{r}_2$ et $\Delta \mathbf{r}_3$ sont les déplacements de la charge M, de l'échelle et de l'homme par rapport au référentiel donné. Si on retient que $\Delta \mathbf{r}_1 = -\Delta \mathbf{r}_2$ et $\Delta \mathbf{r}_3 = \Delta \mathbf{r}_2 + \Delta \mathbf{r}'$, il en résulte

$$\Delta \mathbf{r}_C = (m/2M)\, \Delta \mathbf{r}'.$$

● **4.3.** Un système se compose de deux billes de masses m_1 et m_2 liées entre elles par un ressort impondérable. On a communiqué aux billes les vitesses

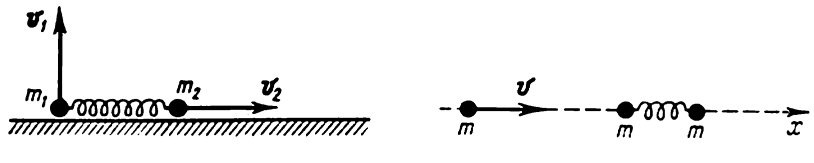


Fig. 67 Fig. 68

$\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ d'après la figure 67, après quoi le système a commencé à se déplacer dans le champ de pesanteur de la Terre. Négligeant la résistance de l'air et admettant qu'à l'instant initial le ressort n'était pas déformé, trouver:

1) la vitesse $\mathbf{V}_C\,(t)$ du centre d'inertie de ce système en fonction du temps;

2) l'énergie mécanique interne du système lors du mouvement.

Solution. 1. D'après (4.11), l'accroissement du vecteur vitesse du centre d'inertie est $d\mathbf{V}_C = \mathbf{g}dt$. En intégrant cette expression on obtient $\mathbf{V}_C\,(t) - \mathbf{V}_C\,(0) = \mathbf{g}t$, où $\mathbf{V}_C\,(0)$ est la vitesse initiale du centre d'inertie. Il vient

$$\mathbf{V}_C\,(t) = (m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2)/(m_1 + m_2) + \mathbf{g}t.$$

2. L'énergie mécanique interne du système de billes c'est son énergie $\widetilde{E}$ dans le système C. Dans notre cas C se déplace avec une accélération $\mathbf{g}$; donc, chaque bille subit dans ce système de référence l'action de deux forces extérieures, de la force de pesanteur $m_i\mathbf{g}$ et de la force de l'inertie $-m_i\mathbf{g}$. Il est clair que le travail total de ces forces e térieures est nul (dans C), et par suite, l'énergie $\widetilde{E}$ ne changera pas. Pour la trouver, il suffit d'examiner l'instant initial, lorsque le ressort n'est pas encore déformé et l'énergie $\widetilde{E}$ n'est égale qu'à l'énergie cinétique $\widetilde{T}_0$ dans le système C. En profitant de la formule (4.16) on obtient

$$\widetilde{E} = \widetilde{T}_0 = \frac{\mu}{2}\,(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2 = \frac{m_1 m_2}{2\,(m_1 + m_2)}\,(v_1^2 + v_2^2).$$

● **4.4.** Après avoir subi une collision de front avec un haltère élastique au repos (fig. 68), une bille d'énergie cinétique T a été rejetée dans la direction opposée avec une énergie cinétique T'. Les masses de toutes les trois billes sont les mêmes. Trouver l'énergie des oscillations de l'haltère après l'impact.

Solution. Soient p et p' les impulsions de la bille incidente avant et après l'impact, et p'_C et T'_C, l'impulsion et l'énergie cinétique de l'haltère en tant qu'un tout unique après l'impact; E est l'énergie des oscillations. D'après la loi de conservation de l'impulsion et de l'énergie

$$p = -p' + p'_C; \qquad T = T' + T'_C + E.$$

Compte tenu du fait que $T = p^2/2m$, ces deux équations permettent de tirer

$$E = (T - 3T' - 2\sqrt{TT'})/2.$$

● **4.5.** Dans un référentiel K une particule *1* de masse m_1 percute une particule *2* au repos de masse m_2. La charge de chaque particule est $+q$. Trouver la distance minimale à laquelle elles s'approcheraient lors d'une collision de front, si loin de la particule 2 l'énergie cinétique de la particule *1* est égale à T_1.

Solution. Examinons ce processus aussi bien dans le référentiel K que dans le système C.

1. A l'instant du rapprochement maximal dans K, les deux particules se déplaceront comme un tout unique à une vitesse v qu'on peut définir à partir de la loi de conservation de l'impulsion

$$p_1 = (m_1 + m_2)\, v,$$

où p_1 est l'impulsion de la particule incidente; $p_1 = \sqrt{2m_1T_1}$. D'autre part, la loi de conservation de l'énergie entraîne

$$T_1 = (m_1 + m_2)v^2/2 + \Delta U,$$

où l'accroissement de l'énergie potentielle du système est $\Delta U = kq^2/r_{min}$.

En éliminant de ces deux équations v, on obtient

$$r_{min} = (kq^2/T_1)\,(1 + m_1/m_2).$$

2. Dans le système C la solution est la plus simple: ici l'énergie cinétique totale des particules est absorbée complètement par l'accroissement de l'énergie potentielle du système de particules à l'instant de leur rapprochement maximal

$$\tilde{T} = \Delta U,$$

où, d'après (4.16), $\tilde{T} = \mu v_1^2/2 = T_1m_2/(m_1 + m_2)$; $\Delta U = kq^2/r_{min}$. A partir de ces données il est facile de calculer r_{min}.

● **4.6.** Une particule de masse m_1 et d'impulsion p_1 a subi une collision élastique avec une particule au repos de masse m_2. Calculer l'impulsion p'_1 de la première particule après la collision qui a défini sa diffusion sous un angle ϑ par rapport à la direction initiale du mouvement.

Solution. La loi de conservation de l'impulsion (fig. 69) entraîne

$$p_2'^2 = p_1^2 + p_1'^2 - 2p_1p_1' \cos\vartheta, \qquad (1)$$

où p'_2 est l'impulsion de la deuxième particule après la collision.

D'autre part, la loi de conservation de l'énergie entraîne que $T_1 = T'_1 + T'_2$, où T'_1 et T'_2 sont les énergies cinétiques de la première et de la deuxième particules après la collision. Ramenons cette égalité à l'aide de la relation $T = p^2/2m$ à la forme

$$p_2'^2 = (p_1^2 - p_1'^2)\, m_2/m_1. \qquad (2)$$

En éliminant $p_2'^2$ de (1) et (2), on obtient

$$p'_1 = p_1 \frac{\cos\vartheta \pm \sqrt{\cos^2\vartheta + (m_2^2/m_1^2 - 1)}}{1 + m_2/m_1}.$$

Si $m_1 < m_2$, il n'y a que le signe plus devant la racine qui a un sens physique. Ceci résulte du fait qu'à cette condition la racine sera plus grande que $\cos\vartheta$, et puisque p'_1 est le module, il ne peut naturellement pas être négatif.

Mais si $m_1 > m_2$, les deux signes devant la racine ont un sens physique; dans ce cas la réponse est ambiguë; sous un angle ϑ l'impulsion de la particule diffusée peut avoir l'une des deux valeurs (ceci dépend de la position relative des particules à l'instant de la collision). Le dernier cas correspond au diagramme vectoriel représenté sur la figure 63, *c*.

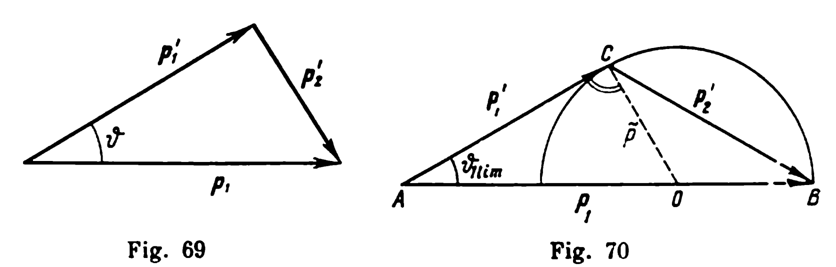


Fig. 69 Fig. 70

● 4.7. Quelle partie η de son énergie cinétique perd une particule de masse m_1 lors de la diffusion élastique sous un angle limite par une particule au repos de masse m_2, où $m_1 > m_2$?

Solution. Soient T_1 et p_1, T_1' et p_1' les valeurs de l'énergie cinétique et de impulsion de la particule incidente avant et après la diffusion; il vient

$$\eta = (T_1 - T_1')/T_1 = 1 - T_1'/T_1 = 1 - (p_1'/p_1)^2, \qquad (1)$$

c'est-à-dire le problème se ramène au calcul de p_1'/p_1.

Utilisons le diagramme vectoriel des impulsions relatif à l'angle limite $\vartheta_{1\,lim}$ (fig. 70). Le triangle rectangle ACO amène

$$p_1'^2 - (p_1 - \tilde{p})^2 - \tilde{p}^2 = p_1^2 - 2p_1\tilde{p},$$

d'où

$$(p_1'/p_1)^2 = 1 - 2\tilde{p}/p_1 = 1 - 2m_2/(m_1 + m_2). \qquad (2)$$

Après avoir porté (2) dans (1), on obtient

$$\eta = 2m_2/(m_1 + m_2).$$

● 4.8. Un atome de masse m_1 a subi une collision inélastique avec une molécule au repos de masse m_2. Après la collision les deux particules s'écartèrent sous un angle θ l'une par rapport à l'autre avec les énergies cinétiques T_1' et T_2' respectivement; la molécule ayant acquis un état excité, son énergie interne a augmenté d'une grandeur définie Q. Calculer Q ainsi que l'énergie cinétique de seuil de l'atome, qui rend possible la transition de la molécule à l'état excité donné.

Solution. Dans ce processus les lois de conservation de l'énergie et de l'impulsion impliquent

$$T_1 = T_1' + T_2' + Q;$$
$$p_1^2 = p_1'^2 + p_2'^2 + 2p_1'p_2' \cos\theta,$$

où les grandeurs primées sont celles d'après la collision (la deuxième relation résulte directement du triangle des impulsions d'après le théorème des cosinus). En utilisant la formule $p^2 = 2mT$, éliminons T_1 de ces équations. Il en résultera

$$Q = (m_2/m_1 - 1)\, T_2' + 2\sqrt{(m_2/m_1)\, T_1'T_2'} \cos\theta$$

et

$$T_{1\,seuil} = |\,Q\,|\,(m_1 + m_2)/m_2.$$

● 4.9. Une particule d'impulsion $\mathbf{p}_0$ (dans le référentiel K) s'est désintégrée en vol en deux particules de masses m_1 et m_2. L'énergie Q qui s'en est dégagée est l'énergie de désintégration (elle s'est transformée en énergie cinétique). Construire le diagramme vectoriel des impulsions de ce processus et trouver en l'appliquant toutes les impulsions $\mathbf{p}_1$ et $\mathbf{p}_2$ possibles des particules produites.

Solution. La représentation de ce processus est la plus simple dans le système C : la particule en désintégration est alors au repos, et les produits de désintégration s'envolent dans des directions opposées avec des impulsions égales en module $\tilde{p}_1 = \tilde{p}_2 = \tilde{p}$. L'énergie de la désintégration Q se transforme entièrement en énergie cinétique totale $\tilde{T}$ des particules qui apparaissent. Donc

$$\tilde{p} = \sqrt{2\mu\tilde{T}} = \sqrt{2\mu Q},$$

où μ est la masse réduite des particules produites.

Calculons maintenant les impulsions de ces particules dans K. Utilisons la formule de transformation des vitesses lors du passage du système C au référentiel K ; écrivons

$$\mathbf{p}_1 = m_1\mathbf{v}_1 = m_1(\mathbf{V}_C + \tilde{\mathbf{v}}_1) = m_1\mathbf{V}_C + \tilde{\mathbf{p}}_1\ ;$$

$$\mathbf{p}_2 = m_2\mathbf{v}_2 = m_2(\mathbf{V}_C + \tilde{\mathbf{v}}_2) = m_2\mathbf{V}_C + \tilde{\mathbf{p}}_2\ ;$$

de plus, d'après la loi de conservation de l'impulsion, $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_0$.

Appliquons ces formules pour construire le diagramme vectoriel des impulsions (fig. 71). Représentons d'abord le segment AB égal à l'impulsion $\mathbf{p}_0$. Puis traçons un cercle de rayon $\tilde{p}$ et de centre en O qui divise le segment AB

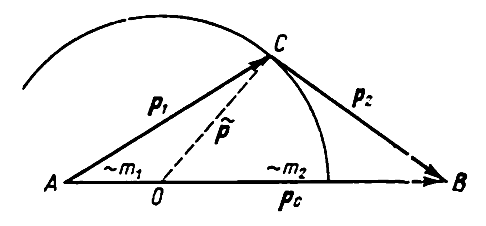


Fig. 71

en deux parties sous le rapport $m_1 : m_2$. Ce cercle est bien le lieu géométrique des points de toutes les positions possibles du sommet C du triangle des impulsions ABC.

● 4.10. A l'instant $t = 0$ une plate-forme commence à se déplacer sous l'action de la force de traction $\mathbf{F}$ constante. En négligeant le frottement dans les axes, trouver la relation entre la vitesse de la plate-forme et le temps, si

1) elle est chargée avec du sable qui s'écoule par un trou au fond à une vitesse constante μ kg/s, alors qu'à l'instant $t = 0$ la masse de la plate-forme avec le sable était m_0 ;

2) à l'instant $t = 0$ on commence à charger la plate-forme dont la masse est m_0 avec du sable à partir d'une trémie fixe, de façon que la vitesse de chargement est constante et égale à μ, kg/s.

Solution. 1. Dans ce cas la réaction est nulle et l'équation de Méchtcherski est de la forme

$$(m_0 - \mu t)\, d\mathbf{v}/dt = \mathbf{F},$$

d'où

$$d\mathbf{v} = \mathbf{F}dt/(m_0 - \mu t).$$

En intégrant cette équation compte tenu des conditions initiales, on obtient

$$\mathbf{v} = (\mathbf{F}/\mu)\ln[m_0/(m_0 - \mu t)].$$

2. Dans le cas donné, la composante horizontale de la réaction (la seule qui nous intéresse) $\mathbf{R} = \mu(-\mathbf{v})$, où $\mathbf{v}$ est la vitesse de la plate-forme. Donc, l'équation de Méchtcherski se ramène à la formule (4.28) ou

$$d(m\mathbf{v}) = \mathbf{F}dt.$$

En intégrant cette équation compte tenu des conditions initiales, on obtient

$$m\mathbf{v} = \mathbf{F}t,$$

où $m = m_0 + \mu t$. D'où

$$\mathbf{v} = \mathbf{F}t/(m_0 + \mu t).$$

Les expressions obtenues ne sont évidemment vraies dans les deux cas que lorsqu'il s'agit du déchargement ou du chargement de la plate-forme.

● **4.11.** Un vaisseau cosmique de masse m_0 se déplace en l'absence du champ de forces extérieur à une vitesse constante $\mathbf{v}_0$. Pour modifier la direction du mouvement on a engagé un moteur à réaction qui s'est mis à projeter un jet de gaz à une vitesse $\mathbf{u}$ constante par rapport au vaisseau, le vecteur $\mathbf{u}$ étant tout le temps perpendiculaire à la direction du mouvement. Lorsque l'action du moteur a cessé, la masse du vaisseau est devenue m. Trouver l'angle de la modification de la direction du vaisseau par suite du fonctionnement du moteur.

Solution. Cherchons l'accroissement du vecteur vitesse du vaisseau pendant l'intervalle de temps dt. En multipliant les deux membres de l'équation de Méchtcherski (4.26) par dt et en tenant compte que $\mathbf{F} = 0$, on obtient

$$d\mathbf{v} = \mathbf{u}\, dm/m.$$

Ici $dm < 0$. Le vecteur $\mathbf{u}$ étant toujours perpendiculaire au vecteur $\mathbf{v}$ (vitesse du vaisseau), le module du vecteur $\mathbf{v}$ ne change pas et reste égal à la valeur initiale : $|\mathbf{v}| = |\mathbf{v}_0| = v_0$. On en tire que l'angle de rotation $d\alpha$ du vecteur $\mathbf{v}$ en un temps dt s'écrit

$$d\alpha = |d\mathbf{v}|/v_0 = (u/v_0)\,|dm/m|.$$

En intégrant cette expression, on obtient

$$\alpha = (u/v_0) \ln (m_0/m).$$

CHAPITRE 5

ÉQUATION FONDAMENTALE DE LA DYNAMIQUE

§ 5.1. Moment cinétique d'une particule. Moment d'une force

L'analyse des systèmes montre qu'en plus de l'énergie et de l'impulsion il existe encore une grandeur physique qui est également régie par la loi de conservation: c'est *le moment cinétique* *. Quelle est cette grandeur et quelles sont ses propriétés?

Considérons d'abord une particule isolée. Soit **r** le rayon vecteur caractéristique de sa position par rapport au point O du système de référence retenu, et **p**, son impulsion dans ce système. On appelle moment cinétique de la particule A par rapport au point O (fig. 72) le vecteur **L** égal au produit vectoriel des vecteurs **r** et **p**:

$$\boxed{\mathbf{L} = [\mathbf{rp}].} \qquad (5.1)$$

Cette définition montre que **L** est un vecteur axial. Sa direction est choisie de façon que la rotation autour du point O dans la direction du vecteur **p** et le vecteur **L** forment un système dextrogyre. Le module du vecteur **L** s'écrit

$$L = rp \sin \alpha = lp, \qquad (5.2)$$

où α est l'angle entre **r** et **p**; $l = r \sin \alpha$ est le bras du vecteur **p** par rapport à O (fig. 72).

Equations des moments. Elucidons quelle grandeur mécanique est responsable de la variation du vecteur **L** dans un référentiel donné. A cet effet dérivons (5.1) par rapport au temps

$$d\mathbf{L}/dt = [d\mathbf{r}/dt,\ \mathbf{p}] + [\mathbf{r},\ d\mathbf{p}/dt].$$

Le point O étant fixe, le vecteur $d\mathbf{r}/dt$ est égal à la vitesse **v** de la particule, c'est-à-dire coïncide en direction avec le vecteur **p**; donc

$$[d\mathbf{r}/dt,\ \mathbf{p}] = 0.$$

Ensuite, d'après la deuxième loi de Newton, $d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}$, où **F** est la résultante de toutes les forces appliquées à la particule. Par conséquent,

$$d\mathbf{L}/dt = [\mathbf{rF}].$$

---

* On dit aussi *moment de la quantité du mouvement*, *moment de rotation*, *moment angulaire* ou tout simplement *moment*.

La grandeur du second membre de cette équation s'appelle *moment de la force* **F** par rapport à O (fig. 73). En le désignant par **M** écrivons

$$\boxed{\mathbf{M} = [\mathbf{rF}].} \tag{5.3}$$

Tout comme **L**, le vecteur **M** est un vecteur axial. D'une façon analogue à (5.2), le module de ce vecteur est

$$M = lF, \tag{5.4}$$

où l est le bras du vecteur **F** par rapport à O (fig. 73).

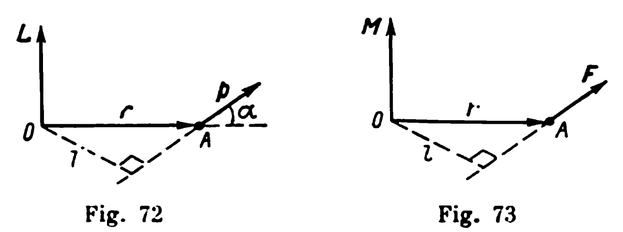


Fig. 72 Fig. 73

Résumons. La dérivée par rapport au temps du moment cinétique **L** d'une particule par rapport à un certain point O du référentiel retenu est égale au moment **M** de la résultante **F** par rapport à ce même point O:

$$\boxed{d\mathbf{L}/dt = \mathbf{M}.} \tag{5.5}$$

Cette équation s'appelle *équation des moments.* Notons que si le référentiel est non galiléen, le moment de la force **M** inclut aussi bien le moment des forces d'interaction que le moment des forces d'inertie (par rapport à ce même point O).

L'équation des moments (5.5) entraîne en particulier que si $\mathbf{M} \equiv 0$, alors $\mathbf{L} = \text{const}$. Autrement dit, si par rapport au point O d'un référentiel retenu, pendant l'intervalle de temps qui nous intéresse le moment de toutes les forces appliquées à une particule est nul, pendant ce même intervalle de temps le moment cinétique de la particule par rapport à ce point est constant.

Exemple 1. Une planète A se déplace dans le champ de gravitation du Soleil C (fig. 74). Par rapport à quel point du système de référence héliocentrique le moment cinétique de la planète se conservera-t-il dans le temps?

Pour répondre à cette question il faut tout d'abord établir quelles sont les forces qui agissent sur la planète A. Dans le cas présent c'est seulement la force de gravitation **F** de la part du Soleil. Puisque lors du mouvement de la planète la direction de cette force passe toujours par le centre du Soleil, ce centre est précisément le point par rapport auquel le mouvement de la force est tout le temps nul et par rapport auquel le moment cinétique de la planète sera constant. Quant à l'impulsion **p** de la planète, elle changera dans ces conditions.

Exemple 2. En se déplaçant sur un plan horizontal lisse une rondelle A rebondit d'une paroi verticale lisse (fig. 75, vue d'en haut). Trouver le point par rapport auquel le moment cinétique de la rondelle sera constant.

La rondelle subit l'action de la force de pesanteur, de la force de réaction de la part du plan horizontal, de la force de réaction **R** de la part de la paroi à l'instant de l'impact. Les deux premières forces s'équilibrent, il ne reste donc

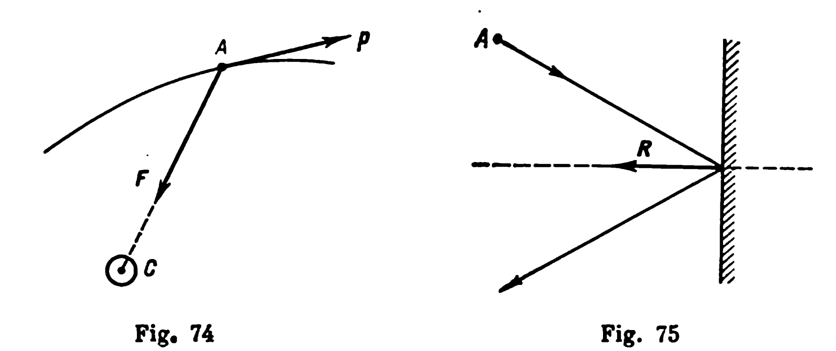


Fig. 74 Fig. 75

que la force **R**. Son moment est nul par rapport à tout point reposant sur la ligne d'action du vecteur **R**; ainsi, dans le processus considéré le moment cinétique de la rondelle sera constant par rapport à l'un quelconque de ces points.

Exemple 3. Un cylindre vertical fixe et une rondelle A liée au cylindre par un fil AB reposent sur un plan horizontal lisse (fig. 76; vue d'en haut). La rondelle est entraînée en mouvement à une vitesse initiale **v** suivant le dessin. Y a-t-il ici un point par rapport auquel le moment cinétique de la rondelle serait constant au cours du mouvement?

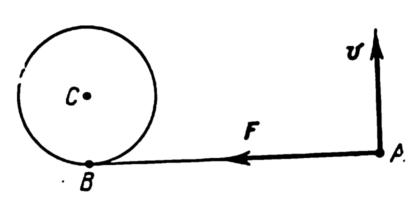


Fig. 76

Dans ce cas la seule force non compensée qui agit sur la rondelle A, c'est la tension **F** de la part du fil. On voit aisément que lors du mouvement *il n'y a pas* de point par rapport auquel le moment cinétique de **F** serait tout le temps nul. Par conséquent, il n'y a pas non plus de point par rapport auquel le moment cinétique de la rondelle serait constant.

Cet exemple montre que ce n'est pas toujours qu'il existe un point par rapport auquel le moment cinétique d'une particule est tout le temps constant.

L'équation des moments (5.5) permet de résoudre deux problèmes:

1) trouver à un instant quelconque t le moment **M** par rapport au point O qui nous intéresse, si on connaît la relation entre le temps et le moment cinétique **L** (t) d'une particule par rapport à ce point;

2) déterminer l'accroissement du moment cinétique d'une particule par rapport à O en un intervalle de temps quelconque, si on connaît la relation entre le temps et le moment **M** (t) qui agit sur la particule (par rapport à ce point).

Le premier problème se résout en calculant la dérivée par rapport au temps du moment cinétique, c'est-à-dire $d\mathbf{L}/dt$, égale d'après (5.5) au moment **M** cherché.

Quant au deuxième problème, il se résout en intégrant l'équation (5.5). En multipliant les deux membres de cette équation par dt, on obtient $d\mathbf{L} = \mathbf{M}dt$, expression qui détermine l'accroissement élémentaire du vecteur **L**. L'intégration de cette expression sur le temps donne l'accroissement du vecteur **L** en un intervalle de temps t fini:

$$\mathbf{L}_2 - \mathbf{L}_1 = \int_0^t \mathbf{M}\, dt. \tag{5.6}$$

La grandeur du second membre de cette équation s'appelle *impulsion du moment d'une force*. De la sorte, l'accroissement du moment cinétique d'une particule en un intervalle de temps quelconque est égal à l'impulsion du moment de la force pour le même intervalle de temps.

Considérons deux exemples.

Exemple 1. Le moment cinétique d'une particule par rapport à un point change dans le temps t d'après la formule $\mathbf{L}(t) = \mathbf{a} + \mathbf{b}t^2$, où **a** et **b** sont des vecteurs constants; de plus, $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$. Trouver le moment **M** qui agit sur la particule lorsque l'angle entre les vecteurs **M** et **L** devient égal à 45°.

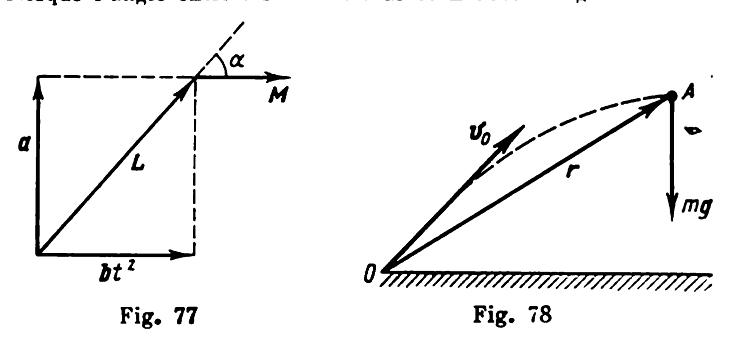


Fig. 77 Fig. 78

D'après (5.5), $\mathbf{M} = d\mathbf{L}/dt = 2\mathbf{b}t$, c'est-à-dire le vecteur **M** coïncide tout le temps en direction avec le vecteur **b**. Représentons les vecteurs **M** et **L** à un certain moment t (fig. 77). Le dessin montre qu'à l'instant t_0, lorsque $a = bt_0^2$ l'angle $\alpha = 45°$. On en tire $t_0 = \sqrt{a/b}$ et $\mathbf{M} = 2\sqrt{a/b}\cdot\mathbf{b}$.

Exemple 2. Une pierre A de masse m est lancée sous un angle à l'horizon à la vitesse initiale $\mathbf{v}_0$. En négligeant la résistance de l'air trouver la relation entre le temps et le moment cinétique de la pierre $\mathbf{L}(t)$ par rapport au point de lancement O (fig. 78).

En un intervalle de temps dt le moment cinétique de la pierre par rapport à O recevra un accroissement $d\mathbf{L} = \mathbf{M}dt = [\mathbf{r}, m\mathbf{g}]\, dt$. Puisque $\mathbf{r} = \mathbf{v}_0 t + \mathbf{g}t^2/2$ (cf. p. 15), il vient $d\mathbf{L} = [\mathbf{v}_0, m\mathbf{g}]\, t dt$. En intégrant cette expression compte tenu qu'à l'instant $t = 0$, $\mathbf{L}(0) = 0$, on obtient $\mathbf{L}(t) = [\mathbf{v}_0, m\mathbf{g}]\, t^2/2$. Il est donc clair qu'au cours du mouvement la direction du vecteur **L** reste inchangée (le vecteur **L** est dirigé derrière le plan; fig. 78).

Moment cinétique et moment d'une force par rapport à un axe. Prenons dans le référentiel retenu un axe des z fixe arbitraire. Supposons que par rapport à un point O sur l'axe des z le moment cinétique d'une particule A est égal à **L**, et le moment de la force qui agit sur la particule, à **M**.

On appelle moment cinétique par rapport à l'axe des z la projection sur cet axe du vecteur **L** défini par rapport à un point arbitraire O de cet axe (fig. 79). On introduit d'une façon analogue la notion du moment d'une force par rapport à l'axe. On les note respectivement L_z et M_z. Nous verrons par la suite que L_z et M_z ne dépendent pas du choix de O sur l'axe des z.

Fig. 79

Etablissons quelles sont les propriétés de ces grandeurs. En projetant (5.5) sur l'axe des z, on obtient

$$dL_z/dt = M_z, \tag{5.7}$$

c'est-à-dire la dérivée sur le temps du moment cinétique d'une particule par rapport à l'axe des z est égale au moment de la force par rapport à cet axe. En particulier, si $M \equiv 0$, $L_z = \text{const}$. Autrement dit, si le moment d'une force par rapport à l'axe des z fixe est nul, le moment cinétique d'une particule par rapport à cet axe est constant. Mais il se peut que dans ces conditions le vecteur **L** lui-même change.

Exemple. Un petit corps de masse m suspendu à un fil se déplace uniformément suivant un cercle horizontal (fig. 80) sous l'action de la force de pesanteur $m\mathbf{g}$ et de la tension **T** de la part du fil. Par rapport au point O le vecteur **L** qui est le moment cinétique du corps, se trouve dans le même plan que l'axe des z et le fil; lors du mouvement du corps **L** tourne, c'est-à-dire change tout le temps sous l'action du moment **M** de la force de pesanteur. Quant à la projection L_z, elle reste constante, puisque le vecteur **M** est perpendiculaire à l'axe des z et $M_z = 0$.

Cherchons maintenant les expressions analytiques de L_z et M_z. On voit aisément que ce problème se ramène à la recherche des projections sur l'axe des z des produits vectoriels [**rp**] et [**rF**].

Utilisons les coordonnées cylindriques ρ, φ, z en liant à la particule A (fig. 81) les vecteurs unités $\mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_z$ dirigés dans le sens de l'accroissement des coordonnées respectives. Dans ce système de coordonnées, le rayon vecteur **r** et l'impulsion **p** de la particule s'écrivent

$$\mathbf{r} = \rho\mathbf{e}_\rho + z\mathbf{e}_z; \quad \mathbf{p} = p_\rho\mathbf{e}_\rho + p_\varphi\mathbf{e}_\varphi + p_z\mathbf{e}_z,$$

où p_ρ, p_φ, p_z sont les projections du vecteur **p** sur les vecteurs unités correspondants. L'algèbre vectorielle enseigne que le produit vec-

toriel [rp] peut être mis sous la forme d'un déterminant

$$\mathbf{L} = [\mathbf{rp}] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_\rho & \mathbf{e}_\varphi & \mathbf{e}_z \\ \rho & 0 & z \\ p_\rho & p_\varphi & p_z \end{vmatrix}.$$

Ceci rend clair que le moment cinétique d'une particule par rapport à l'axe des z

$$L_z = \rho p_\varphi, \tag{5.8}$$

où ρ est la distance entre la particule et l'axe des z. Réduisons cette expression à la forme plus commode pour les applications pratiques.

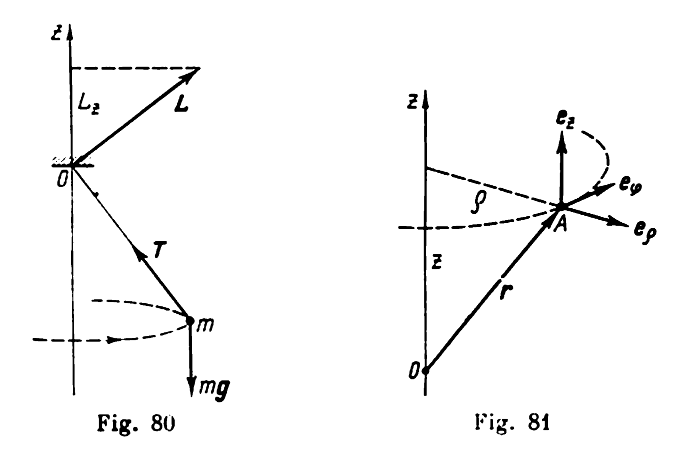


Fig. 80 Fig. 81

Tenant compte que $p_\varphi = mv_\varphi = m\rho\omega_z$, on obtient

$$L_z = m\rho^2\omega_z, \tag{5.9}$$

où ω_z est la projection de la vitesse angulaire ω à laquelle tourne le rayon vecteur de la particule.

Le moment d'une force par rapport à l'axe des z s'écrit d'une façon analogue à (5.8)

$$M_z = \rho F_\varphi, \tag{5.10}$$

où F_φ est la projection du vecteur de la force **F** sur le vecteur unité $\mathbf{e}_\varphi$.

Attirons l'attention sur le fait que les projections L_z et M_z ne dépendent pas en effet du choix sur l'axe des z du point O par rapport auquel on détermine les vecteurs **L** et **M**. D'autre part, il est clair que L_z et M_z sont des grandeurs algébriques, leurs signes correspondent aux signes des projections p_φ et F_φ.

§ 5.2. Loi de conservation du moment cinétique

Choisissons un système de particules arbitraire. Introduisons la notion du moment cinétique d'un système en tant que somme vectorielle des moments cinétiques de ses particules isolées:

$$\mathbf{L} = \sum \mathbf{L}_i, \tag{5.11}$$

où tous les vecteurs sont déterminés par rapport à un seul et même point O du système de référence donné. Notons que le moment cinétique d'un système est une grandeur *additive*: pour un système il est égal à la somme des moments cinétiques de ses parties isolées indépendamment du fait, si elles interagissent entre elles ou non.

Etablissons quelle grandeur détermine la variation du moment cinétique du système. A cet effet dérivons (5.11) par rapport au temps: $d\mathbf{L}/dt = \sum d\mathbf{L}_i/dt$. Au paragraphe précédent nous avons montré que la dérivée $d\mathbf{L}_i/dt$ est égale au moment de toutes les forces qui agissent sur l'i-ième particule. Présentons ce moment sous la forme de la somme des moments des forces intérieures et extérieures, c'est-à-dire $\mathbf{M}_i' + \mathbf{M}_i$. Il vient

$$d\mathbf{L}/dt = \sum \mathbf{M}_i' + \sum \mathbf{M}_i.$$

Ici la première somme est le moment global de toutes les forces intérieures par rapport à O, et la deuxième, le moment global de toutes les forces extérieures par rapport au même point O.

Montrons que *le moment global de toutes les forces intérieures* par rapport à un point quelconque *est nul*. En effet, les forces intérieures ce sont les forces d'interaction entre les particules du système considéré. D'après la troisième loi de Newton, ces forces sont les mêmes deux à deux en module, opposées en direction et reposent sur la même droite, c'est-à-dire ont le même bras. C'est pourquoi les moments des forces de chaque couple d'interaction sont égaux en module et opposés en direction, c'est-à-dire équilibrent l'un l'autre, et par suite, le moment global de toutes les forces intérieures est toujours nul.

Il en résulte que la dernière équation se met sous la forme

$$\boxed{d\mathbf{L}/dt = \mathbf{M},} \tag{5.12}$$

où $\mathbf{M}$ est le moment global de toutes les forces *extérieures*: $\mathbf{M} = \sum \mathbf{M}_i$.

L'équation (5.12) affirme: *la dérivée par rapport au temps du moment cinétique d'un système est égale au moment global de toutes les forces extérieures*. Bien entendu, les deux moments $\mathbf{L}$ et $\mathbf{M}$ sont déterminés ici par rapport à un seul et même point O du référentiel donné.

De même que dans le cas d'une particule, l'équation (5.12) entraîne que l'accroissement du moment cinétique d'un système

en un intervalle de temps t fini

$$\boxed{\mathbf{L}_2 - \mathbf{L}_1 = \int_0^t \mathbf{M}\, dt,} \tag{5.13}$$

c'est-à-dire l'accroissement du moment cinétique d'un système est égal à l'impulsion du moment global de toutes les forces extérieures pour un intervalle de temps correspondant. Là aussi, bien sûr, les deux moments **L** et **M** sont définis par rapport au même point O du système de référence retenu.

Les équations (5.12) et (5.13) sont vraies aussi bien dans des référentiels galiléens que non galiléens. Seulement dans un référentiel non galiléen il faut en plus tenir compte de l'action des forces de l'inertie qui jouent le rôle des forces extérieures, c'est-à-dire dans ces équations il convient d'entendre par **M** la somme $\mathbf{M}_{\text{in}} + \mathbf{M}_{\text{inert}}$, où $\mathbf{M}_{\text{in}}$ est le moment global des forces extérieures d'interaction; $\mathbf{M}_{\text{inert}}$, le moment global des forces d'inertie (par rapport au même point O du référentiel).

Résumons. Nous avons abouti à une conclusion importante: d'après l'équation (5.12) *le moment cinétique d'un système peut varier seulement sous l'action du moment global de toutes les forces extérieures.* On en tire directement une autre conclusion importante, à savoir, la *loi de conservation du moment cinétique*:

dans un référentiel galiléen le moment cinétique d'un système de particules fermé est constant, c'est-à-dire ne change pas dans le temps. Ceci est vrai pour le moment cinétique pris par rapport à un point *quelconque* d'un système de référence galiléen.

De la sorte, dans un référentiel galiléen, le moment cinétique d'un système de particules fermé s'écrit

$$\boxed{\mathbf{L} = \sum \mathbf{L}_i(t) = \text{const.}} \tag{5.14}$$

Cette dernière expression montre que les moments cinétiques des parties isolées ou des particules d'un système fermé peuvent changer dans le temps. Pourtant, ces variations se produisent toujours de façon que l'accroissement du moment cinétique d'une partie du système est égal à la décroissance du moment cinétique de sa partie restante (ceci, évidemment, par rapport au même point du référentiel).

Dans ce sens les équations (5.12) et (5.13) peuvent être envisagées comme une formulation plus générale de la loi de conservation du moment cinétique, une formulation qui indique également la *cause* de sa variation dans le système retenu; cette cause étant l'action exercée par d'autres corps (par l'intermédiaire du moment des

forces d'interaction extérieures). Bien entendu, ce qui vient d'être dit, n'est vrai que pour des systèmes de référence galiléens.

Insistons encore une fois sur le fait que la loi de conservation du moment cinétique ne concerne que les référentiels galiléens. Ceci ne veut pas dire que le moment cinétique ne peut pas être conservé dans des référentiels non galiléens également. A cet effet, il suffit que d'après l'équation (5.12), vraie également dans des référentiels non galiléens, le moment global de toutes les forces extérieures (y compris les forces d'inertie) soit nul. Des situations de ce genre sont assez rares et les cas correspondants ont un caractère très particulier.

La loi de conservation du moment cinétique joue un rôle aussi important que la loi de conservation de l'énergie et de l'impulsion. Dans de nombreux cas elle permet de tirer plusieurs conclusions essentielles sur les propriétés de tels ou tels processus sans s'approfondir dans leur étude détaillée. Illustrons ce qui vient d'être dit par l'exemple suivant.

Exemple. Deux billes identiques peuvent glisser sur une tige lisse horizontale (fig. 82). Les billes sont rapprochées et liées par un fil. Ensuite, toute l'installation est entraînée en rotation autour de l'axe vertical, et laissée à elle-même,

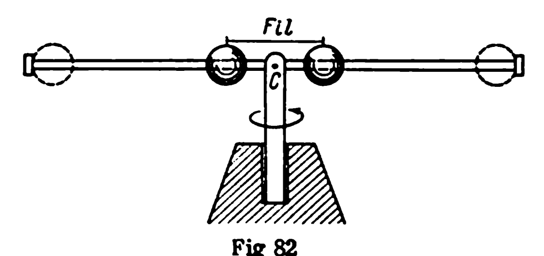


Fig 82

après quoi le fil est brûlé. Les billes glissent naturellement vers les extrémités de la tige, alors que la vitesse angulaire de l'installation diminue brusquement.

Cet effet est une conséquence immédiate de la loi de conservation du moment cinétique, du fait que l'installation se comporte comme un système fermé (les forces extérieures se compensent entre elles, les forces de frottement sur l'axe sont faibles). Pour évaluer quantitativement la variation de la vitesse angulaire, admettons que la masse de toute l'installation est pratiquement concentrée dans les billes, leurs dimensions étant négligeables. Alors, l'égalité des moments cinétiques des billes par rapport au point C aux états du système initial et final $2m\,[\mathbf{r}_1\mathbf{v}_1] = 2m\,[\mathbf{r}_2\mathbf{v}_2]$, entraîne

$$r_1^2\omega_1 = r_2^2\omega_2.$$

On voit donc que l'augmentation de la distance r entre les billes et l'axe de rotation diminue la vitesse angulaire de l'installation (sous le rapport $1/r^2$). Et inversement, si la distance entre les billes diminuait (sous l'action des forces intérieures quelconques), la vitesse angulaire de l'installation augmenterait. Cet effet est d'un caractère général et, par exemple, les patineurs artistiques et les gymnastes en profitent largement.

Attirons l'attention sur le fait que le résultat final ne dépend pas du tout du caractère des forces intérieures (ici ce sont les forces de frottement entre les billes et la tige).

Un intérêt particulier présentent les cas dans lesquels le moment cinétique **L** se conserve pour des systèmes ouverts, dont l'impulsion **p**, comme on sait, change avec le temps. Si par rapport à un point O d'un référentiel retenu, pendant l'intervalle de temps qui nous intéresse le moment global des forces extérieures $\mathbf{M} \equiv 0$, alors, d'après (5.12) pendant ce temps le moment cinétique du système se conserve par rapport à O. Des systèmes ouverts peuvent en général ne pas posséder de tels points, ce qui dans chaque cas concret convient d'établir en premier lieu.

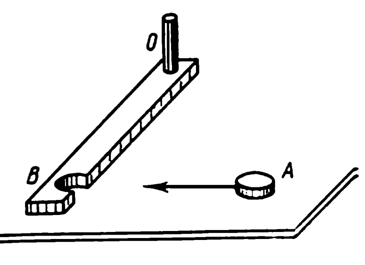


Fig. 83

Exemple 1. Le système Terre-Lune qui se déplace dans le champ de gravitation du Soleil est un système ouvert. Sous l'action des forces de gravitation son impulsion change incessamment. Il existe pourtant là un point par rapport auquel le moment des forces de gravitation qui agit sur le système est toujours nul: c'est le centre du Soleil. On peut donc affirmer que par rapport au centre du Soleil le moment cinétique du système Terre-Lune est constant.

Exemple 2. Sur un plan horizontal lisse repose une tige OB qui peut tourner librement autour d'un axe vertical fixe, qui passe par l'extrémité O de la tige (fig. 83). Après avoir glissé sur le plan, une rondelle A vient se bloquer à l'extrémité B de la tige pour entraîner le système en rotation comme un tout unique autour du point O.

Il est clair que le système rondelle-tige est un système ouvert: en plus des forces qui s'équilibrent dans le sens vertical, l'impact fera que de la part de l'axe agira une force horizontale. Une autre force de la part de l'axe apparaît une fois que la tige est mise en rotation; elle fera que le centre d'inertie se déplace suivant un cercle. Mais ces deux forces extérieures passent par O; par conséquent, leur moment par rapport à O est toujours nul. On en tire la conclusion que par rapport à O le moment cinétique du système sera constant.

Dans un cas plus restreint, les systèmes ouverts peuvent conserver non pas le moment cinétique **L** lui-même, mais sa projection sur un certain axe des z fixe. Il en est ainsi lorsque la projection sur cet axe du moment global **M** de toutes les forces extérieures est nulle. En effet, après avoir projeté l'équation (5.12) sur l'axe des z, on obtient

$$dL_z/dt = M_z. \tag{5.15}$$

Ici L_z et M_z sont le moment cinétique et le moment global des forces extérieures par rapport à l'axe des z:

$$L_z = \sum L_{iz}; \quad M_z = \sum M_{iz}, \tag{5.16}$$

où L_{iz} et M_{iz} sont le moment cinétique et le moment des forces extérieures de l'i-ième particule du système par rapport à l'axe des z.

L'équation (5.15) entraîne que si par rapport à un axe des z fixe dans le référentiel donné la projection $M_z \equiv 0$, par rapport à cet axe le moment cinétique du système se conserve

$$L_z = \sum L_{iz}(t) = \text{const.} \tag{5.17}$$

Quant au vecteur **L** lui-même, défini par rapport à un point arbitraire O de cet axe, il peut changer. Par exemple, si le système se déplace dans un champ de pesanteur homogène, le moment global de toutes les forces de pesanteur par rapport à un point fixe quelconque O est perpendiculaire à la verticale; par conséquent, par rapport à tout axe vertical $M_z \equiv 0$ et $L_z = \text{const}$, ce qu'on ne peut pas dire du vecteur **L**.

Les raisonnements qui amènent à la loi de conservation du moment cinétique reposent complètement sur la validité des lois de Newton. Mais en est-il ainsi des systèmes qui n'observent pas ces lois, par exemple, des systèmes à rayonnement électromagnétique, des atomes, des noyaux, etc. ?

Compte tenu du rôle énorme que joue la loi de conservation du moment cinétique, la notion du moment cinétique est étendue en physique aux systèmes non mécaniques (qui ne respectent pas les lois de Newton) en postulant la loi de conservation du moment cinétique pour tous les processus physiques.

Une telle *loi* étendue *de conservation du moment cinétique* n'est déjà plus une conséquence des lois de Newton, mais *constitue un principe général indépendant, généralisation des faits d'expérience.* Avec les lois de conservation de l'énergie et de l'impulsion, *la loi de conservation du moment cinétique est l'une des lois fondamentales de la nature.*

§ 5.3. Moment cinétique propre

Au paragraphe précédent nous avons établi que le moment cinétique **L** d'un système ne change que sous l'action du moment global **M** de toutes les forces extérieures; c'est précisément ce vecteur **M** qui détermine le comportement du vecteur **L**. Maintenant examinons certaines propriétés de ces grandeurs présentant le plus d'intérêt et les conclusions importantes qui s'en suivent.

Moment global des forces extérieures. Tout comme le moment de chaque force, le moment global dépend, en général, du choix du point par rapport auquel on le détermine. Soient **M**, le moment global des forces par rapport à O; **M'**, ce même moment par rapport à O' dont le rayon vecteur est $\mathbf{r}_0$ (fig. 84). Cherchons la relation entre **M** et **M'**.

Les rayons vecteurs $\mathbf{r}_i$ et $\mathbf{r}'_i$ du point d'application de la force $\mathbf{F}_i$ sont liés par la relation $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}'_i + \mathbf{r}_0$ (fig. 84). L'expression

de **M** peut donc se mettre sous la forme

$$\mathbf{M} = \sum [\mathbf{r}_i \mathbf{F}_i] = \sum [\mathbf{r}'_i \mathbf{F}_i] + \sum [\mathbf{r}_0 \mathbf{F}_i],$$

ou

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}' + [\mathbf{r}_0 \mathbf{F}], \qquad (5.18)$$

où $\mathbf{F} = \sum \mathbf{F}_i$ est la résultante de toutes les forces extérieures.

La formule (5.18) montre que si $\mathbf{F} = 0$, le moment global des forces extérieures ne dépend pas du choix du point par rapport auquel on le détermine. Tel est notamment le cas d'un *couple de forces* appliqué au système.

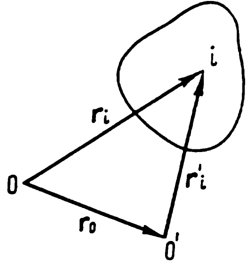


Fig. 84

Le système *C* possède sous ce rapport une particularité intéressante et importante (rappelons que c'est un système de référence qui est lié invariablement au centre d'inertie d'un système de particules et qui se déplace en translation par rapport aux systèmes galiléens). Puisque dans le cas général un système *C* est non galiléen, la résultante de toutes les forces extérieures doit inclure en plus des forces d'interaction $\mathbf{F}_{\text{in}}$ les forces d'inertie $\mathbf{F}_{\text{inert}}$. D'autre part, dans un système *C* le système de particules en tant qu'un tout unique est au repos, ce qui veut dire d'après (4.14) que $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\text{in}} + \mathbf{F}_{\text{inert}} = 0$. En vertu de (5.18) nous aboutissons à la conclusion suivante: *dans un système C le moment global de toutes les forces extérieures, y compris des forces d'inertie, ne dépend pas du choix du point O.*

Encore une autre conclusion importante: *dans un système C le moment global des forces d'inertie par rapport au centre d'inertie est toujours nul:*

$$\boxed{\mathbf{M}_C^{\text{inert}} = 0.} \qquad (5.19)$$

En effet, la force d'inertie qui agit sur chaque particule du système $\mathbf{F}_i = -m_i \mathbf{w}_0$, où $\mathbf{w}_0$ est l'accélération du système *C*. Donc, par rapport au centre d'inertie, le moment global de toutes ces forces

$$\mathbf{M}_C^{\text{inert}} = \sum [\mathbf{r}_i, -m_i \mathbf{w}_0] = -[(\sum m_i \mathbf{r}_i), \mathbf{w}_0].$$

D'après (4.8), $\sum m_i \mathbf{r}_i = m \mathbf{r}_C$, et puisque dans notre cas $\mathbf{r}_C = 0$, il vient $\mathbf{M}_C^{\text{inert}} = 0$.

Moment cinétique propre. Tout comme le moment des forces, le moment cinétique d'un système dépend, en général, du choix du point *O* par rapport auquel on le détermine. Lors du transfert de ce point à la distance $\mathbf{r}_0$ (fig. 84), les nouveaux rayons vecteurs des particules $\mathbf{r}'_i$ sont liés aux anciens $\mathbf{r}_i$ par la formule $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}'_i + \mathbf{r}_0$.

Le moment cinétique du système par rapport à O peut donc s'écrire

$$\mathbf{L} = \sum [\mathbf{r}_i \mathbf{p}_i] = \sum [\mathbf{r}'_i \mathbf{p}_i] + \sum [\mathbf{r}_0 \mathbf{p}_i],$$

ou

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}' + [\mathbf{r}_0 \mathbf{p}], \qquad (5.20)$$

où $\mathbf{L}'$ est le moment cinétique du système par rapport à O', et $\mathbf{p} = \sum \mathbf{p}_i$ est l'impulsion totale du système.

La formule (5.20) entraîne que si l'impulsion totale du système $\mathbf{p} = 0$, son moment cinétique ne dépend pas de O. Or, c'est ce qui distingue le système C dans lequel le système de particules est au repos en tant qu'un tout unique. On en tire la troisième conclusion importante: *dans le système C le moment cinétique d'un système de particules ne dépend pas du choix du point* par rapport auquel on le détermine. Disons que c'est le *moment cinétique propre* du système, noté $\tilde{\mathbf{L}}$.

Relation entre L et $\tilde{\mathbf{L}}$. Soit $\mathbf{L}$ le moment cinétique d'un système de particules par rapport au point O du référentiel K. Le moment cinétique propre $\tilde{\mathbf{L}}$ dans le système C ne dépendant pas du choix de O', prenons-le coïncidant *à l'instant donné* avec O du système K. A cet instant, les rayons vecteurs de chaque particule dans les deux référentiels seront les mêmes ($\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i$), alors que les vitesses des particules sont liées par la formule

$$\mathbf{v}_i = \tilde{\mathbf{v}}_i + \mathbf{V}_C, \qquad (5.21)$$

où $\mathbf{V}_C$ est la vitesse du système C par rapport au système K. On peut donc écrire

$$\mathbf{L} = \sum m_i [\mathbf{r}_i \mathbf{v}_i] = \sum m_i [\mathbf{r}_i \tilde{\mathbf{v}}_i] + \sum m_i [\mathbf{r}_i \mathbf{V}_C]. \qquad (5.22)$$

La première somme du second membre de cette égalité est le moment cinétique propre $\tilde{\mathbf{L}}$. Conformément à la formule (4.8) mettons la deuxième somme sous la forme $m[\mathbf{r}_C \mathbf{V}_C]$ ou $[\mathbf{r}_C \mathbf{p}]$, où m est la masse du système tout entier; $\mathbf{r}_C$, le rayon vecteur de son centre d'inertie dans K; $\mathbf{p}$, l'impulsion globale du système de particules. Il en résulte

$$\boxed{\mathbf{L} = \tilde{\mathbf{L}} + [\mathbf{r}_C \mathbf{p}],} \qquad (5.23)$$

c'est-à-dire *le moment cinétique* $\mathbf{L}$ *d'un système de particules se compose de son moment cinétique propre* $\tilde{\mathbf{L}}$ *et du moment* $[\mathbf{r}_C \mathbf{p}]$ *conditionné par le mouvement du système de particules en tant qu'un tout unique.*

Prenons, par exemple, une sphère homogène qui roule sur un plan incliné. Son moment cinétique par rapport à un point de ce plan se compose du moment cinétique lié au mouvement du centre

d'inertie de la sphère et du moment cinétique propre conditionné par la rotation de la sphère autour de son axe propre.

La formule (5.23) entraîne en particulier que si le centre d'inertie d'un système est au repos (l'impulsion du système $\mathbf{p} = 0$), son moment cinétique $\mathbf{L}$ est son moment cinétique propre. Nous connaissons déjà ce cas. Dans un autre cas limite, lorsque $\tilde{\mathbf{L}} = 0$, le moment cinétique du système par rapport à un point n'est déterminé que par le moment lié au mouvement du système en tant qu'un tout unique, c'est-à-dire par le deuxième terme de (5.23). Tel est le comportement, par exemple, du moment cinétique d'un solide en translation.

Equation des moments dans le système C. Au paragraphe précédent nous avons noté que l'équation (5.12) est vraie dans un référentiel quelconque. Par conséquent, elle l'est également dans le système C. On peut donc écrire: $d\tilde{\mathbf{L}}/dt = \tilde{\mathbf{M}}$, où $\tilde{\mathbf{M}}$ est le moment global des forces extérieures dans le système C.

Dans le cas général, le système C étant non galiléen, le moment des forces d'inertie entre dans $\tilde{\mathbf{M}}$ en plus des moments des forces d'interaction extérieures. D'autre part, au début de ce paragraphe (cf. p. 135) nous avons montré que dans le système C le moment des forces $\tilde{\mathbf{M}}$ ne dépend pas du choix du point par rapport auquel on le détermine. Dans les cas courants, pour un tel point on prend C, centre d'inertie du système. L'avantage que présente ce choix consiste dans le fait que par rapport à C le moment des forces d'inertie est nul; il convient donc de *ne* tenir compte *que* du moment global des forces d'interaction extérieures $\mathbf{M}_C$. Ainsi,

$$\boxed{d\tilde{\mathbf{L}}/dt = \mathbf{M}_C,} \tag{5.24}$$

c'est-à-dire la dérivée par rapport au temps du moment cinétique propre d'un système est égale au moment global de toutes les forces d'interaction extérieures par rapport au centre d'inertie du système considéré.

En particulier, si $\mathbf{M}_C \equiv 0$, $\tilde{\mathbf{L}} = \text{const}$, c'est-à-dire le *moment cinétique propre* d'un système se conserve.

Dans les projections sur l'axe des z qui passe par le centre d'inertie du système, l'équation (5.24) devient

$$d\tilde{L}_z/dt = M_{Cz}, \tag{5.25}$$

où M_{Cz} est le moment global des forces d'interaction extérieures par rapport à l'axe des z fixe dans le système C et passant par le centre d'inertie. Là aussi si $M_{Cz} \equiv 0$, $\tilde{L}_z = \text{const}$.

§ 5.4. Dynamique d'un solide

Dans le cas général le mouvement d'un solide est déterminé par deux équations vectorielles, dont l'une est celle du mouvement du centre d'inertie (4.11), et l'autre, celle des moments dans le système C (5.24)

$$m\, d\mathbf{V}_C/dt = \mathbf{F}\,; \quad d\tilde{\mathbf{L}}/dt = \mathbf{M}_C. \tag{5.26}$$

En connaissant les lois (formules) des forces extérieures en action, les points de leur application et les conditions initiales, on peut à l'aide de ces équations trouver à un instant quelconque aussi bien la vitesse, que la position de chaque point du solide, c'est-à-dire résoudre complètement le problème du mouvement d'un corps. Or, malgré la simplicité apparente des équations (5.26), dans le cas général leur résolution est une tâche ardue. Ceci est dû avant tout à ce que, à l'exception de quelques cas particuliers, dans le système C la relation entre le moment cinétique propre $\tilde{\mathbf{L}}$ et les vitesses des points isolés d'un solide s'avère compliquée. Nous n'examinerons pas ce problème sous sa forme générale (tâche assumée par la théorie générale) en nous bornant dans ce qui suit à quelques cas particuliers.

Mais d'abord nous mentionnerons certaines considérations immédiates de la forme des équations (5.26) elles-mêmes. Si nous transférons les forces dans la direction de leur action, il est clair que ni leur résultante $\mathbf{F}$, ni leur moment global $\mathbf{M}_C$ ne changeront pas. Dans ces conditions, l'équation (5.26) ne changera pas, et par suite, le mouvement du solide ne changera pas non plus. C'est pourquoi le point d'application des forces extérieures peut être transféré dans la direction de l'action des forces, astuce à laquelle on recourt constamment.

Résultante. Dans le cas où le moment global de toutes les forces extérieures s'avère perpendiculaire à la résultante, c'est-à-dire $\mathbf{M} \perp \mathbf{F}$, toutes les forces extérieures peuvent être ramenées à *une* force $\mathbf{F}$ qui agit le long d'une droite définie. En effet, si par rapport à un point O le moment global $\mathbf{M} \perp \mathbf{F}$, on peut toujours trouver un vecteur $\mathbf{r}_0 \perp \mathbf{M}$ (fig. 85) tel que pour des $\mathbf{M}$ et $\mathbf{F}$ donnés

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r}_0\mathbf{F}].$$

Le choix de $\mathbf{r}_0$ n'est pas univoque; l'addition d'un vecteur quelconque $\mathbf{r}$ parallèle à $\mathbf{F}$ ne changera pas cette dernière égalité. Or, cela signifie que cette égalité détermine non pas le point d'« application » de la force $\mathbf{F}$, mais la ligne de son action. En connaissant les modules M et F des vecteurs correspondants, on peut trouver le bras l de la force $\mathbf{F}$ (fig. 85): $l = M/F$.

De la sorte, si $\mathbf{M} \perp \mathbf{F}$, le système de forces qui agissent sur les points isolés d'un solide peut être remplacé par une *résultante*, force égale à $\mathbf{F}$ et qui crée un moment égal au moment global $\mathbf{M}$ de toutes les forces extérieures.

Tel est, en particulier, le cas d'un champ de forces homogène, par exemple du champ de pesanteur dans lequel la force qui agit sur chaque particule est de la forme $\mathbf{F}_i = m_i\mathbf{g}$. Dans ce cas, le moment global de la force de pesanteur par rapport à un point O quelconque s'écrit :

$$\mathbf{M} = \sum [\mathbf{r}_i, m_i\mathbf{g}] = [(\sum m_i\mathbf{r}_i)\ \mathbf{g}].$$

D'après (4.8), la somme entre parenthèses est égale à $m\mathbf{r}_C$, où m est la masse du corps ; $\mathbf{r}_C$, le rayon vecteur de son centre d'inertie par rapport à O. Donc

$$\mathbf{M} = [m\mathbf{r}_C, \mathbf{g}] = [\mathbf{r}_C, m\mathbf{g}].$$

Cela signifie que la résultante des forces de pesanteur $m\mathbf{g}$ passe par le centre d'inertie du corps. Dans les cas courants, on dit que la résultante des forces de pesanteur est « appliquée » au centre d'inertie du corps ou à son centre de gravité. Il est clair que le moment de cette force par rapport au centre d'inertie du corps est nul.

Conditions d'équilibre d'un solide. Un corps gardera son état au repos s'il n'y a pas de causes qui l'entraînent en mouvement. D'après les équations (5.26) il faut et il suffit de remplir à cet effet deux conditions :

1) la résultante de toutes les forces extérieures appliquées au corps doit être nulle

$$\mathbf{F} = \sum \mathbf{F}_{i\,\text{ext}} = 0\,;$$

2) le moment global des forces extérieures par rapport à un point quelconque doit être nul

$$\mathbf{M} = \sum \mathbf{M}_{i\,\text{ext}} = 0.$$

Ces conditions doivent être observées dans le référentiel où le corps est au repos. Si le référentiel est non galiléen, en plus des forces d'interaction extérieures il faut encore tenir compte des forces d'inertie. Ceci se rapporte également aux moments des forces.

Maintenant passons à l'examen de quatre cas particuliers du mouvement d'un solide : 1) rotation autour d'un axe fixe ; 2) mouvement plan ; 3) rotation autour des axes libres ; 4) cas particulier du mouvement d'un corps à un point fixe (gyroscope).

1. Rotation autour d'un axe fixe. Trouvons d'abord l'expression du moment cinétique d'un solide par rapport à l'axe de rotation OO' (fig. 86). Utilisons la formule (5.9) pour écrire

$$L_z = \sum L_{iz} = (\sum m_i\rho_i^2)\,\omega_z,$$

où m_i et ρ_i sont la masse et la distance entre l'axe de rotation et l'i-ième particule du solide ; ω_z, sa vitesse angulaire. En notant la grandeur entre parenthèses par I, on obtient

$$\boxed{L_z = I\omega_z,} \qquad (5.27)$$

où I est ce qu'on appelle le ***moment d'inertie*** d'un solide par rapport à l'axe OO' :

$$I = \sum m_i \rho_i^2. \tag{5.28}$$

On voit sans peine que le moment d'inertie d'un solide est une grandeur additive et dépend de la distribution des masses par rapport à l'axe retenu.

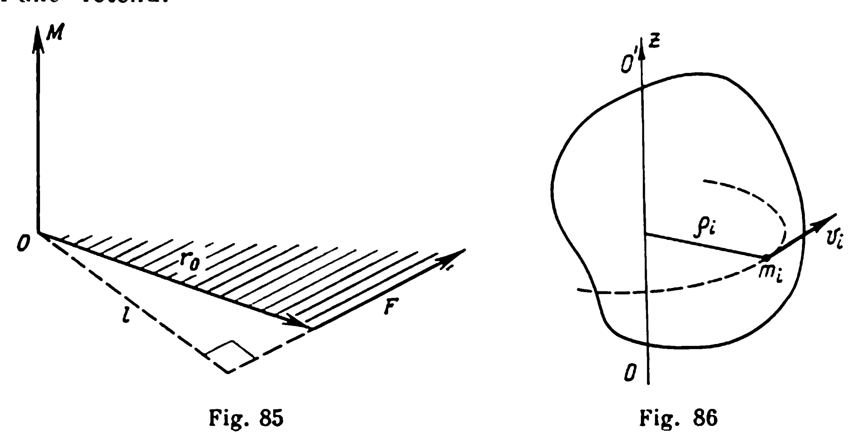


Fig. 85

Fig. 86

Le moment d'inertie d'un corps se calcule d'après la formule

$$I = \int r^2\, dm = \int \rho r^2\, dV,$$

où dm et dV sont la masse et le volume d'un élément du corps qui se trouve à la distance r de l'axe des z retenu ; ρ, la densité du corps en point donné.

Les moments d'inertie de certains corps homogènes par rapport à l'axe des z_C, passant par le centre d'inertie du corps, sont consignés sur le tableau suivant (m est ici la masse du corps) :

Solide	Axe des z_C	Moment d'inertie I_C
Tige mince d'une longueur l	Perpendiculaire à la tige	$\frac{1}{12} ml^2$
Cylindre continu de rayon R	Coïncide avec l'axe du cylindre	$\frac{1}{2} mR^2$
Disque mince de rayon R	Coïncide avec le diamètre du disque	$\frac{1}{4} mR^2$
Sphère de rayon R	Passe par le centre de la sphère	$\frac{2}{5} mR^2$

Le calcul du moment d'inertie d'un solide de forme arbitraire par rapport à tel ou tel axe est en général assez méticuleux au sens mathématique. Pourtant, dans certains cas le calcul se simplifie sensiblement si on applique le *théorème de Schteiner*: le moment d'inertie I par rapport à un axe des z arbitraire est égal au moment d'inertie I_C par rapport à l'axe des z_C parallèle à l'axe donné et passant par le centre d'inertie C, plus le produit de la masse m du corps par le carré de la distance a entre les axes

$$\boxed{I = I_C + ma^2.} \tag{5.29}$$

La démonstration de ce théorème est donnée dans l'appendice *3*.

De la sorte, si on connaît le moment d'inertie I_C, le calcul du moment d'inertie I est une opération élémentaire. Par exemple, le moment d'inertie d'une tige mince (de masse m et de longueur l) par rapport à un axe perpendiculaire à la tige et passant par son extrémité s'écrit

$$I = \frac{1}{12} ml^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} ml^2.$$

Equation fondamentale de la dynamique de la rotation d'un solide (axe de rotation fixe). Cette équation se déduit sans peine de (5.15) si on dérive (5.27) par rapport au temps; il vient

$$\boxed{I\beta_z = M_z,} \tag{5.30}$$

où M_z est le moment global de toutes les forces extérieures par rapport à l'axe de rotation. Cette équation montre, en particulier, que dans une rotation le moment d'inertie I détermine les propriétés d'inertie d'un solide: pour la même valeur du moment des forces M_z un corps de moment d'inertie plus grand acquiert une accélération angulaire β_z plus petite.

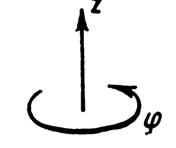


Fig. 87

Rappelons que les moments des forces par rapport à un axe sont des grandeurs algébriques, leurs signes dépendent aussi bien du choix de la direction positive de l'axe des z (coïncidant avec l'axe de rotation), que de la direction de la « rotation » du moment de la force correspondant. Par exemple, après avoir choisi la direction positive de l'axe des z suivant la figure 87, nous donnons par là même la direction positive de la lecture de l'angle φ (ces deux directions sont liées par la règle du tire-bouchon). Ensuite, si un certain moment M_{iz} « entraîne en rotation » dans la direction positive de l'angle φ, ce moment est considéré comme positif, et inversement. Quant au signe du moment global M_z, il détermine à son tour le signe de β_z qui est la projection du vecteur accélération angulaire sur l'axe des z.

L'intégration de l'équation (5.30) compte tenu des conditions initiales (valeurs de ω_{0z} et φ_0 à l'instant initial) permet de résoudre complètement le problème de la rotation d'un solide autour d'un axe fixe, c'est-à-dire d'établir la dépendance par rapport au temps de la vitesse angulaire et de l'angle de rotation, $\omega_z(t)$ et $\varphi(t)$.

Notons que l'équation (5.30) est vraie dans un référentiel *quelconque* lié invariablement à l'axe de rotation. Pourtant, si le référentiel est non galiléen, il faut retenir que le moment des forces M_z inclut non seulement les moments des forces d'interaction, mais aussi les moments des forces d'inertie.

Energie cinétique d'un solide en rotation (axe de rotation fixe). Compte tenu du fait que la vitesse de l'i-ième particule d'un solide en rotation $v_i = \rho_i\omega$, écrivons

$$T = \sum m_i v_i^2/2 = \left(\sum m_i\rho_i^2\right)\omega^2/2,$$

ou, sous une forme abrégée,

$$\boxed{T = I\omega^2/2,} \qquad (5.31)$$

où I est le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe de rotation ; ω, sa vitesse angulaire.

Exemple. Le disque *1* (fig. 88) tournant autour d'un axe vertical lisse à une vitesse angulaire ω_1 subit l'action du disque *2* qui tombe sur lui en tournant à la vitesse angulaire ω_2. Le frottement entre ces deux disques fait qu'après un certain temps ils commencent à tourner comme un tout unique. Trouver l'accroissement de l'énergie cinétique de rotation de ce système, si les moments d'inertie des disques par rapport à l'axe de rotation sont égaux respectivement à I_1 et I_2.

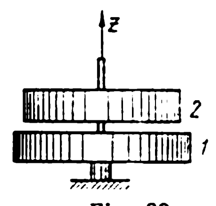


Fig. 88

Calculons d'abord la vitesse angulaire stabilisée de la rotation. La loi de conservation du moment cinétique d'un système par rapport à l'axe des z entraîne que $I_1\omega_{1z} + I_2\omega_{2z} = (I_1 + I_2)\,\omega_z$, d'où

$$\omega_z = (I_1\omega_{1z} + I_2\omega_{2z})/(I_1 + I_2). \qquad (1)$$

Notons que ω_{1z}, ω_{2z} et ω_z sont des grandeurs algébriques. S'il s'avère que $\omega_z > 0$, le vecteur correspondant ω coïncide avec la direction positive de l'axe des z, et inversement.

L'accroissement de l'énergie cinétique de la rotation de ce système

$$\Delta T = (I_1 + I_2)\,\omega_z^2/2 - (I_1\omega_{1z}^2/2 - I_2\omega_{2z}^2/2).$$

En remplaçant ω_z par l'expression (1), on obtient

$$\Delta T = -\frac{I_1 I_2}{2(I_1 + I_2)}(\omega_{1z} - \omega_{2z})^2. \qquad (2)$$

Le signe moins montre que l'énergie cinétique du système diminue.

Attirons l'attention sur le fait que les résultats obtenus (1) et (2) ressemblent beaucoup quant à la forme et au sens, au cas d'une collision absolument inélastique (cf. p. 108).

Travail des forces extérieures lors de la rotation d'un solide autour d'un axe fixe. En vertu de la loi de variation de l'énergie mécanique d'un système, le travail élémentaire de toutes les forces

extérieures qui agissent sur un solide n'est égal à l'accroissement de la seule énergie cinétique du corps, puisque dans ces conditions son énergie potentielle propre ne change pas. De la sorte, $\delta A = dT$. En utilisant (5.31) écrivons $\delta A = d\,(I\omega^2/2)$. Puisque l'axe des z coïncide avec l'axe de rotation, il vient $\omega^2 = \omega_z^2$ et

$$\delta A = I\omega_z\, d\omega_z.$$

Mais d'après (5.30), $I d\omega_z = M_z\, dt$. En portant cette expression dans la dernière équation de δA et en tenant compte que $\omega_z dt = d\varphi$, on obtient

$$\delta A = M_z\, d\varphi. \tag{5.32}$$

Le travail δA est une grandeur algébrique: si M_z et $d\varphi$ ont les mêmes signes, alors $\delta A > 0$, et si leurs signes sont opposés, $\delta A < 0$.

Lors de la rotation d'un solide d'un angle fini φ le travail des forces extérieures s'écrit

$$\boxed{A = \int_0^{\varphi} M_z\, d\varphi.} \tag{5.33}$$

Si $M_z = \text{const}$, cette dernière expression devient plus simple: $A = M_z\varphi$.

Ainsi, lors de la rotation d'un solide autour d'un axe fixe le travail des forces extérieures est déterminé par l'action du moment M_z de ces forces par rapport à l'axe donné. Si les forces sont telles que leur moment $M_z \equiv 0$, elles n'effectuent pas de travail.

2. Mouvement plan d'un solide (cf. p. 23). Dans un mouvement plan le centre d'inertie C d'un solide se déplace dans un plan déterminé, fixe dans le référentiel K donné, alors que le vecteur de sa vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$ est tout le temps perpendiculaire à ce plan. Cette dernière affirmation signifie que dans le système C un solide effectue un mouvement purement rotatif autour d'un axe fixe dans ce système, passant par le centre d'inertie du corps. Le mouvement rotatif du corps est déterminé par l'équation (5.30) qui, comme nous l'avons noté, est valable dans un référentiel quelconque.

De cette façon, le mouvement plan d'un solide est décrit par deux équations suivantes:

$$m\mathbf{w}_C = \mathbf{F}; \quad I_C\beta_z = M_{Cz}, \tag{5.34}$$

où m est la masse du corps; $\mathbf{F}$, la résultante de toutes les forces extérieures; I_C et M_{Cz}, le moment d'inertie et le moment global de toutes les forces extérieures, les deux par rapport à l'axe qui passe par le centre d'inertie du corps.

Il convient de retenir que le moment M_{Cz} n'inclut que les forces d'interaction extérieures, bien que dans le cas général le système C soit un système non galiléen. Ceci est dû au fait que le moment glo-

bal des forces d'inertie est nul aussi bien par rapport au centre d'inertie, que par rapport à tout axe passant par ce point. On peut donc tout simplement ne pas en tenir compte (cf. p. 137).

Notons également que l'accélération angulaire β_z et, par suite, ω_z et φ sont les mêmes dans les deux référentiels, puisque le système C se déplace *en translation* par rapport au référentiel galiléen K.

En intégrant les équations (5.34) compte tenu des conditions initiales on peut trouver les relations entre $\mathbf{r}_C(t)$ et $\varphi(t)$, qui déterminent la position d'un solide à un instant t quelconque.

Pour résoudre le problème du mouvement d'un solide *lié* il faut recourir à une condition supplémentaire, limitant le mouvement par des liaisons existantes. Cette condition donne la relation cinématique entre les accélérations linéaire et angulaire.

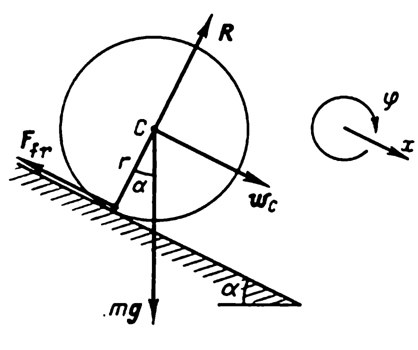


Fig. 89

Exemple. Un cylindre homogène de masse m et de rayon r roule sans glisser sur un plan incliné qui fait avec l'horizon un angle α (fig. 89). Trouver l'équation du mouvement du cylindre.

L'*approche usuelle* de la résolution de tels problèmes consiste à établir d'abord quelles forces agissent sur le corps considéré et les points de leur application (dans notre cas ce sont $m\mathbf{g}$, la force de pesanter; $\mathbf{R}$, la composante normale de la réaction de la part du plan incliné et $\mathbf{F}_{fr}$, la force de frottement au repos). Puis on choisit les directions positives de l'axe des x et de l'angle de rotation φ (le mieux est de choisir ces directions de façon que les signes des accélérations w_{Cx} et β_z soient les mêmes), par exemple, suivant la figure 89, à droite. Et ce n'est qu'ensuite qu'on écrit les équations du mouvement proprement dites (5.34) en projections ainsi choisies sur les directions positives de x et φ:

$$mw_{Cx} = mg\sin\alpha - F_{fr}; \quad I_C\beta_z = rF_{fr}.$$

Par ailleurs, la condition d'absence de glissement détermine encore la relation cinétique entre les accélérations:

$$w_{Cx} = r\beta_z.$$

La résolution commune de ces trois équations permet de calculer les accélérations $\mathbf{w}_C$ et β, ainsi que la force $\mathbf{F}_{fr}$.

Energie cinétique dans le mouvement plan d'un solide. Supposons qu'un corps effectue un mouvement plan dans un certain référentiel galiléen K. Pour calculer son énergie cinétique T utilisons la formule (4.12). Dans le cas considéré, la grandeur $\tilde{T}$ qui fait partie de cette formule représente l'énergie cinétique de rotation dans le système C autour de l'axe passant par le centre d'inertie du corps.

D'après (5.31) $\tilde{T} = I_C\omega^2/2$; on peut donc écrire

$$\boxed{T = \frac{I_C\omega^2}{2} + \frac{mV_C^2}{2},} \qquad (5.35)$$

où I_C est le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe de rotation qui passe par son centre d'inertie; ω, la vitesse angulaire du corps; m, sa masse; V_C, la vitesse du centre d'inertie du corps dans le référentiel K.

De cette façon, *dans un mouvement plan, l'énergie cinétique d'un solide se compose de l'énergie de rotation dans le système C et de l'énergie liée au mouvement du centre d'inertie.*

3. Axes libres. Axes d'inertie principaux. Si un solide est mis en rotation pour être ensuite laissé à lui-même, en général, la direction de l'axe de rotation dans l'espace changera. Pour qu'un axe de rotation arbitraire d'un corps garde invariable sa direction il faut lui appliquer des forces définies.

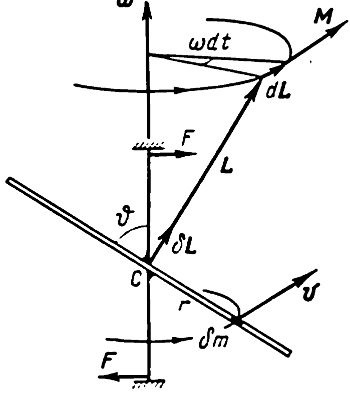


Fig. 90

Examinons cette question de plus près sur l'exemple suivant. Supposons que le milieu d'une tige homogène est solidarisé à l'axe de rotation de façon que l'angle entre la tige et l'axe soit égal à ϑ (fig. 90). Déterminons le moment **M** des forces extérieures qu'il faut appliquer à l'axe de rotation pour que lors de la rotation de la tige avec la vitesse angulaire ω sa direction ne change pas. D'après (5.12) ce moment $\mathbf{M} = d\mathbf{L}/dt$. De la sorte, pour déterminer **M** il faut d'abord calculer le moment cinétique de la tige **L**, puis sa dérivée par rapport au temps.

Le plus simple est de définir le moment cinétique **L** par rapport au point C. Extrayons en pensée un élément de la tige δm qui se trouve à la distance **r** de C. Son moment cinétique par rapport à ce point $\delta\mathbf{L} = [\mathbf{r}, \delta m\mathbf{v}]$, où **v** est la vitesse de l'élément. Il est clair que le vecteur $\delta\mathbf{L}$ est perpendiculaire à la tige (fig. 90), sa direction ne dépendant pas du choix de l'élément δm. Le moment cinétique global **L** de la tige coïncide donc en direction avec le vecteur $\delta\mathbf{L}$.

Notons que dans notre cas le vecteur **L** ne coïncide pas en direction avec le vecteur ω!

Lors de la rotation de la tige, le vecteur **L** tournera également à la vitesse angulaire ω. Pendant l'intervalle de temps dt le vecteur **L** reçoit un accroissement $d\mathbf{L}$ dont le module, comme le montre la fi-

gure 90, est égal à

$$|d\mathbf{L}| = L \sin(\pi/2 - \vartheta)\, \omega dt,$$

ou sous une forme vectorielle: $d\mathbf{L} = [\boldsymbol{\omega}\mathbf{L}]\, dt$. En divisant les deux membres de la dernière expression par dt, on obtient

$$\mathbf{M} = [\boldsymbol{\omega}\mathbf{L}].$$

Ainsi, en effet, pour maintenir dans notre cas l'axe de rotation dans une direction invariable, il faut lui appliquer le moment **M** de certaines forces extérieures F (visualisées sur la fig. 90). Pourtant, il est clair que si $\vartheta = \pi/2$, le vecteur **L** coïncide en direction avec le vecteur $\boldsymbol{\omega}$, et dans ce cas $\mathbf{M} \equiv 0$, c'est-à-dire sans une intervention de l'extérieur la direction de l'axe de rotation sera invariable.

L'axe de rotation d'un corps dont la direction dans l'espace reste invariable sans qu'on lui applique des forces extérieures s'appele *axe libre*.

La théorie démontre que tout solide possède trois axes réciproquement perpendiculaires, passant par le centre d'inertie, qui peuvent servir d'axes libres. On les appelle *axes d'inertie principaux*.

Pour un corps de forme arbitraire leur recherche est une tâche difficile du point de vue mathématique. Mais elle se simplifie sensiblement si le corps possède telle ou telle symétrie, du fait que la position du centre d'inertie et la direction des axes d'inertie principaux possèdent dans ce cas cette même symétrie.

Par exemple, les axes d'inertie principaux d'un parallélipipède rectangle homogène passent par les centres des faces opposées. Si un corps possède un axe de symétrie (un cylindre homogène, par exemple), l'un de ses axes d'inertie principaux est l'axe de symétrie; pour ses deux autres axes d'inertie on peut prendre des axes réciproquement perpendiculaires quelconques reposant dans le plan perpendiculaire à l'axe de symétrie et passant par le centre d'inertie du corps. De la sorte, dans les corps à symétrie axiale un seul des axes d'inertie principaux est fixé. Les axes d'inertie principaux d'un corps à symétrie centrale (par exemple, d'une sphère homogène) sont les trois axes réciproquement perpendiculaires quelconques qui passent par le centre du corps; aucun de ses axes d'inertie principaux n'est fixé par rapport au corps.

Les axes d'inertie principaux jouissent de cette propriété importante que lors de la rotation d'un corps autour de l'un quelconque d'entre eux, son moment cinétique **L** coïncide en direction avec sa vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$ et est déterminé par la formule

$$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}, \tag{5.36}$$

où I est le moment d'inertie par rapport à l'axe d'inertie principal donné. **L** ne dépend pas du choix du point par rapport auquel il est déterminé (on suppose ici que l'axe de rotation est fixe).

Pour établir la validité de (5.36) le plus simple est de considérer un corps homogène à symétrie axiale. En effet, d'après (5.27), le moment cinétique d'un solide par rapport à l'axe de rotation $L_z = I\omega_z$ (rappelons que L_z est la projection du vecteur **L** définie par rapport à un point quelconque de cet axe). Mais si le corps est symétrique par rapport à l'axe de rotation, les considérations de symétrie rendent immédiat que le vecteur **L** coïncide en direction avec le vecteur ω et donc $\mathbf{L} = I\omega$.

Soulignons une fois de plus que dans le cas général (l'axe de rotation ne coïncide avec aucun des axes d'inertie principaux, bien qu'il passe par le centre d'inertie du corps) la direction du vecteur **L** ne coïncide pas avec le vecteur ω et la relation entre ces vecteurs est d'un caractère compliqué. Cette circonstance est à l'origine du comportement compliqué des solides animés d'un mouvement de rotation.

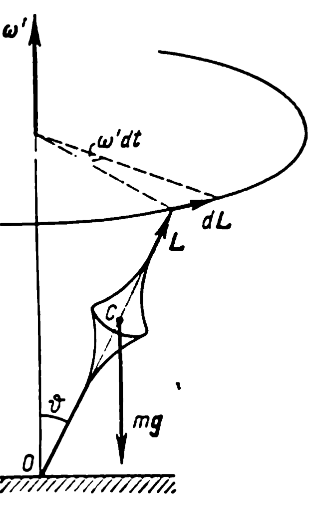


Fig. 91

4. Gyroscopes. On appelle gyroscope un corps massif symétrique qui tourne à une grande vitesse angulaire autour de son axe de symétrie. Examinons son comportement sur l'exemple d'une toupie. L'expérience montre que si l'axe de rotation d'une toupie est incliné à la verticale, la toupie ne tombe pas en effectuant ce qu'on appelle le mouvement de *précession*: son axe décrit un cône autour de la verticale avec une vitesse angulaire ω'; il s'avère que plus la vitesse angulaire ω de la toupie est grande, plus la vitesse angulaire de la précession ω' est petite.

Ce comportement de la toupie d'un gyroscope s'explique sans peine à l'aide de l'équation des moments (5.12), si seulement on adopte que $\omega \gg \omega'$ (cette condition explique, à propos, ce qu'on entend par *grande* vitesse angulaire d'un gyroscope). En effet, le moment cinétique **L** d'une toupie en précession par rapport au point d'appui O (fig. 91) peut être représenté sous la forme de la somme du moment cinétique $\mathbf{L}_\omega$ conditionné par la rotation de la toupie, et d'un certain moment cinétique supplémentaire $\mathbf{L}'$, provoqué par la précession de la toupie autour de l'axe vertical, c'est-à-dire

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_\omega + \mathbf{L}'.$$

Puisque l'axe de la toupie coïncide avec l'un des axes d'inertie principaux, d'après (5.36) $\mathbf{L}_\omega = I\omega$, où I est le moment d'inertie de la toupie par rapport à cet axe. D'autre part, il est clair que plus la

vitesse angulaire de la précession est petite, plus le moment correspondant $\mathbf{L}'$ est petit. Avec $\omega \gg \omega'$, dans tous les cas présentant un intérêt pratique, $L_\omega \gg L'$; le moment cinétique résultant $\mathbf{L}$ coïncide donc pratiquement avec $\mathbf{L}_\omega$ aussi bien en valeur qu'en direction, et on peut admettre que

$$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}.$$

En connaissant le comportement du vecteur $\mathbf{L}$, nous connaîtrons par là même l'allure du mouvement de l'axe de la toupie-gyroscope.

Mais le comportement du vecteur $\mathbf{L}$ est régi par l'équation des moments (5.12). D'après cette équation, le moment cinétique $\mathbf{L}$ par rapport au point O (fig. 91) reçoit en un temps dt l'accroissement

$$d\mathbf{L} = \mathbf{M}dt, \tag{5.37}$$

qui coïncide en direction avec le vecteur $\mathbf{M}$, moment des forces extérieures par rapport à ce même point O (dans notre cas c'est le moment de la force de pesanteur $m\mathbf{g}$). La figure 91 montre que $d\mathbf{L} \perp \mathbf{L}$. Il en résulte que le vecteur $\mathbf{L}$ (et, par suite, l'axe de la toupie) tournera avec le vecteur $\mathbf{M}$ autour de la verticale en décrivant un cône circulaire d'angle de demi-ouverture ϑ. La toupie-gyroscope effectuera une précession autour de l'axe vertical avec une vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}'$.

Cherchons la relation entre les vecteurs $\mathbf{M}$, $\mathbf{L}$ et $\boldsymbol{\omega}'$. D'après le dessin, le module de l'accroissement du vecteur $\mathbf{L}$ en un temps dt est $|d\mathbf{L}| = L \sin \vartheta \cdot \omega' dt$, ou sous une forme vectorielle $d\mathbf{L} = [\boldsymbol{\omega}'\mathbf{L}]\, dt$. En portant cette expression dans (5.37), on obtient

$$[\boldsymbol{\omega}'\mathbf{L}] = \mathbf{M}. \tag{5.38}$$

Cette expression montre que le moment de la force $\mathbf{M}$ détermine la *vitesse* angulaire de la précession $\boldsymbol{\omega}'$ (et non pas l'accélération!). L'élimination instantanée du moment $\mathbf{M}$ fait donc que la précession disparaît instantanément elle aussi. Dans ce sens on peut dire que la précession ne possède pas d'inertie.

Notons que le moment des forces $\mathbf{M}$ qui agit sur le gyroscope peut être d'une nature quelconque. Pour assurer une précession régulière (une vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}'$ constante) il importe seulement que le vecteur $\mathbf{M}$ tourne, sans changer en molude, avec l'axe du gyroscope.

Exemple. Trouver la vitesse angulaire de précession d'une toupie inclinée de masse m qui tourne à une grande vitesse angulaire ω autour de son axe de symétrie, par rapport auquel le moment d'inertie de la toupie est I. Le centre d'inertie de la toupie se trouve à la distance l du point d'appui.

D'après (5.38) $\omega' I\omega \sin \vartheta = mgl \sin \vartheta$, où ϑ est l'angle entre la verticale et l'axe de la toupie (fig. 91). Il en résulte

$$\omega' = mgl/I\omega.$$

Fait curieux à signaler, la grandeur ω' ne dépend pas de l'angle d'inclinaison ϑ de l'axe de la toupie. Par ailleurs, le résultat obtenu montre que ω' est inversement proportionnelle à ω, c'est-à-dire en effet, plus la vitesse angulaire de la toupie est grande, plus la vitesse angulaire de la précession est petite.

Moment gyroscopique. Examinons maintenant l'effet produit par la rotation forcée de l'axe d'un gyroscope. Supposons, par exemple, que l'axe du gyroscope est fixé dans un support en U que nous ferons tourner autour de l'axe OO', suivant la figure 92. Si le moment cinétique **L** du gyroscope est dirigé à droite, pour une telle rotation le vecteur **L** recevra en un temps dt un accroissement $d\mathbf{L}$ qui est un vecteur dirigé derrière le plan du dessin. D'après (5.37) cela signifie que le gyroscope subit l'action du moment des forces **M** qui coïncide en direction avec le vecteur $d\mathbf{L}$. Le moment **M** est conditionné par l'apparition d'un couple de forces F qui agissent sur l'axe du gyroscope de la part du support. Quant à l'axe du gyroscope, il agira, suivant la troisième loi de Newton, sur le support avec la force F' (fig. 92). Ces forces s'appellent *gyroscopiques*, elles créent le *moment gyroscopique* $\mathbf{M}' = -\mathbf{M}$. Notons, que dans notre cas le gyroscope ne possède pas la propriété de résister à la variation de la direction de son axe de rotation.

L'apparition des forces gyroscopiques s'appelle *effet gyroscopique*. Cet effet produit par la pression gyroscopique sur les paliers, est observé dans les rotors des turbines des navires lors de l'exécution des virements et pendant le ballotement, lors de la réalisation des virages par les avions à hélice, etc.

Examinons l'action du moment gyroscopique sur l'exemple d'un gyroscope dont l'axe avec le cadre peut tourner librement autour de l'axe horizontal OO' d'un support en U (fig. 93). Si on communique au support une rotation forcée

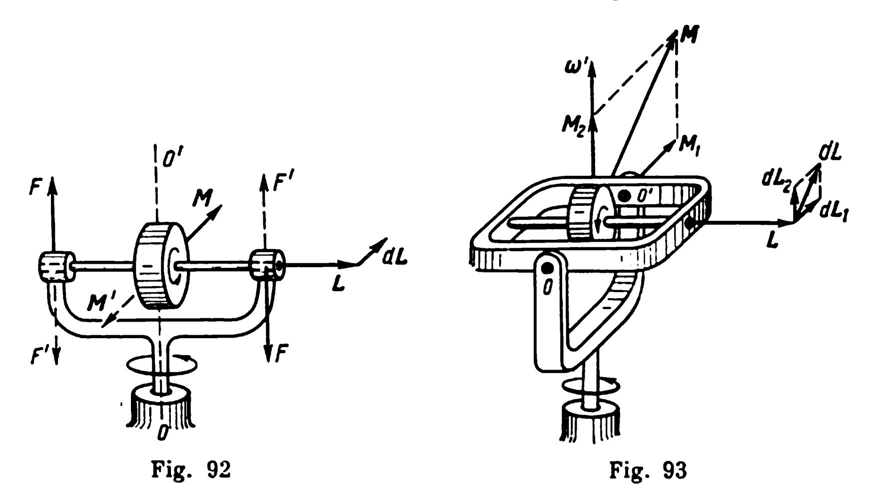


Fig. 92 Fig. 93

par le vecteur $\boldsymbol{\omega}'$ autour de l'axe vertical suivant la figure, le moment cinétique **L** du gyroscope obtiendra en un temps dt l'accroissement $d\mathbf{L}_1$, ce vecteur étant dirigé derrière le dessin. Cet accroissement est conditionné par le moment $\mathbf{M}_1$ d'un couple de forces qui agissent sur l'axe du gyroscope de la part du cadre. Les forces gyroscopiques qui agissent de la part de l'axe du gyroscope sur le

cadre font pivoter ce dernier autour de l'axe horizontal OO'. Le vecteur $\mathbf{L}$ recevra alors un accroissement supplémentaire $d\mathbf{L}_2$ qui, à son tour, est défini par le moment $\mathbf{M}_2$ d'un couple de forces qui agissent sur l'axe du gyroscope de la part du cadre. Il en résulte que l'axe du gyroscope tourne de façon à faire tendre le vecteur $\mathbf{L}$ à coïncider en direction avec le vecteur $\boldsymbol{\omega}'$.

De cette façon, en un temps dt, le moment cinétique du gyroscope $\mathbf{L}$ reçoit l'accroissement $d\mathbf{L} = d\mathbf{L}_1 + d\mathbf{L}_2 = (\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2)\,dt$. Dans ces conditions le cadre subit l'action du moment gyroscopique

$$\mathbf{M}' = -(\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2).$$

La composante de ce moment $\mathbf{M}_1' = -\mathbf{M}_1$ provoque le pivotement du cadre autour de l'axe horizontal OO'; l'autre composante $\mathbf{M}_2' = -\mathbf{M}_2$ *résiste* au pivotement du système tout entier autour de l'axe vertical (à la différence du cas précédent).

L'effet gyroscopique est à la base de différentes applications de gyroscopes: gyrocompas, stabilisateurs gyroscopiques des navires, etc.

Problèmes du chapitre 5

● 5.1. Trouver la distance maximale et minimale entre la planète A et le soleil C si à un certain moment elle se trouvait à la distance r_0 et avait la vitesse v_0, l'angle entre le rayon vecteur $\mathbf{r}_0$ et le vecteur $\mathbf{v}_0$ étant φ (fig. 94).

Solution. Appliquons les lois de conservation du moment cinétique et de l'énergie. Le point par rapport auquel le moment cinétique de la planète se conserve est le centre du Soleil. Donc

$$r_0 m v_0 \sin\varphi = rmv,$$

où m est la masse de la planète. Dans cette égalité le premier membre est le moment cinétique de la planète à l'instant donné, et le second membre, son moment cinétique à la distance maximale (et minimale) r, lorsque $\mathbf{r} \perp \mathbf{v}$.

La loi de conservation de l'énergie entraîne

$$mv_0^2/2 - \gamma mM/r_0 = mv^2/2 - \gamma mM/r,$$

où M est la masse du Soleil; γ, la constante de gravitation.

En éliminant v de ces deux équations, on obtient

$$r = \frac{r_0}{2-\alpha}\left(1 \pm \sqrt{1-\alpha(2-\alpha)\sin^2\varphi}\right),$$

où $\alpha = r_0 v_0^2/\gamma M$. Le signe plus devant la racine correspond à r_{max} et le signe moins, à r_{min}.

● 5.2. Une particule *1* de masse m_1 percute une particule *2* de masse m_2, ayant loin de la particule *2* une énergie cinétique T_0 et le paramètre d'impact l qui est le bras du vecteur impulsion par rapport à la particule *2* (fig. 95). La charge de chaque particule est égale à $+q$. Trouver la distance minimale à laquelle se rapprocheront les particules si

1) $m_1 \ll m_2$;

2) m_1 est comparable à m_2.

Solution. 1. La condition $m_1 \ll m_2$ signifie qu'au cours de l'interaction, la particule *2* restera pratiquement au repos. Le vecteur force qui agit sur la particule *1* passe tout le temps par le point où se trouve la particule *2*. Donc, le moment cinétique de la particule *1* par rapport à la particule *2* au repos se

conserve. On en tire

$$lp_0 = r_{min}p,$$

où le premier membre est le moment cinétique de la particule *1* lorsqu'elle est éloignée de la particule *2*, et le second membre, le moment cinétique à l'ins-

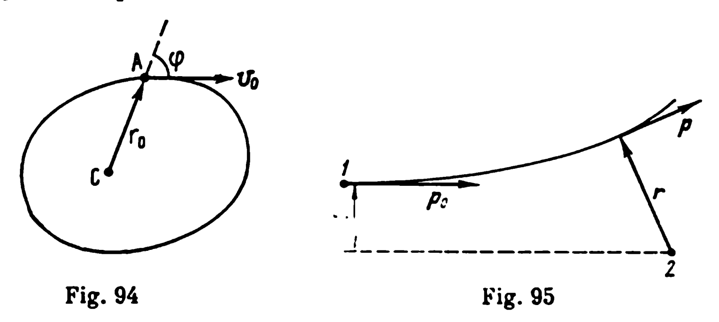


Fig. 94 Fig. 95

tant du rapprochement maximal, lorsque **r** ⊥ **p** (fig. 95). Ensuite, la loi de conservation amène

$$T_0 = T + kq^2/r_{min},$$

où T est l'énergie cinétique de la particule *1* à l'instant du rapprochement maximal. En résolvant ces deux équations (compte tenu de la relation entre p_0 et T_0), on obtient

$$r_{min} = \frac{kq^2}{2T_0}\left(1+\sqrt{1+(2lT_0/kq^2)^2}\right). \quad (1)$$

2. Dans le cas considéré on ne peut déjà pas admettre que lors de l'interaction la particule *2* est au repos. Le plus avantageux est alors de chercher la solution dans le système C, où la « collision » se présente comme c'est représenté sur la figure 96. On suppose que le système des deux particules est fermé ; donc, son moment cinétique propre se conserve

$$l\tilde{p}_{10} = r_{min}\tilde{p}_1, \quad (2)$$

où on n'a tenu compte qu'à l'instant du rapprochement maximal $\mathbf{r}_{12} \perp \tilde{\mathbf{p}}_1$ (cf. fig. 95). D'autre part, la loi de conservation de l'énergie implique

$$\tilde{T}_0 = \tilde{T} + kq^2/r_{min}, \quad (3)$$

où $\tilde{T}_0$ et $\tilde{T}$ sont les énergies cinétiques globales des particules dans le système C, lorsque les particules se trouvent loin l'une de l'autre et à l'instant de leur rapprochement maximal. Des équations (2) et (3) on tire la même expression (1), seulement au lieu de T_0 on aura $\tilde{T}_0$. De plus, dans le cas considéré (la particule 2 était initialement au repos), d'après (4.16)

$$\tilde{T}_0 = \frac{m_2}{m_1+m_2}T_0.$$

Notons qu'avec $m_1 \ll m_2$, $\tilde{T}_0 \approx T_0$, et l'expression de r_{min} coïncidera avec (1).

● 5.3. Une petite bille est suspendue au point O sur un fil léger inextensible d'une longueur l. Puis la bille est tirée de côté de façon que le fil s'écarte d'un angle ϑ de la verticale ; on lui communique ensuite une vitesse initiale v_0 perpendiculaire au plan vertical dans lequel repose le fil. Pour quelle valeur de v_0 l'angle maximal de l'écart du fil de la verticale sera égal à $\pi/2$?

Solution. Dans son mouvement la bille subit l'action de deux forces, de celle de pesanteur et de celle de tension de la part du fil. On voit aisément

que par rapport à l'axe vertical des z qui passe par O, le moment de ces forces $M_z = 0$. Par conséquent, par rapport à l'axe donné, le moment cinétique de la bille $L_z = \text{const}$, ou

$$l \sin\vartheta \cdot mv_0 = l \cdot mv, \tag{1}$$

où m est la masse de la bille; v, sa vitesse en position où le fil fait un angle $\pi/2$ avec la verticale.

La bille se déplace dans le champ de pesanteur terrestre sous l'action d'une force étrangère qui est la force de tension du fil. Cette force est toujours perpendiculaire au vecteur vitesse de la bille, et de ce fait elle n'effectue aucun travail. Il s'ensuit que d'après (3.32) dans le champ de pesanteur terrestre l'énergie mécanique de la bille se conserve:

$$mv_0^2/2 = mv^2/2 + mgl\cos\vartheta, \tag{2}$$

où le second membre de l'égalité correspond à la position horizontale du fil.

En résolvant ensemble (1) et (2), on obtient

$$v_0 = \sqrt{2gl/\cos\vartheta}.$$

● 5.4. Deux petits manchons identiques sont placés sur une bague en fil de fer rigide de rayon r_0, qui tourne librement autour de l'axe vertical AB (fig. 97). Les manchons sont liés par un fil et placés en position $m - m$. Puis

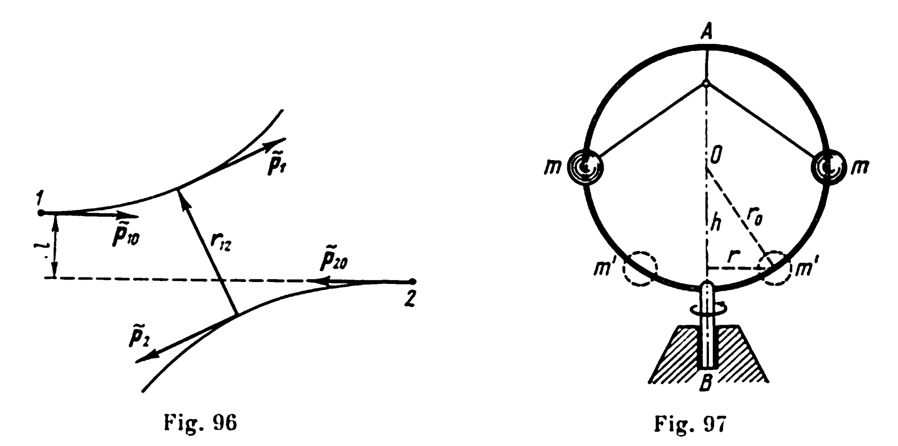


Fig. 96 Fig. 97

toute l'installation reçoit une vitesse angulaire ω_0 après quoi elle est laissée à elle-même et le fil liant les manchons est brûlé en A. En admettant que la masse de l'installation est pratiquement concentrée dans les manchons, trouver sa vitesse angulaire à l'instant où les manchons glissent (sans frottement) en position inférieure extrême $m' - m'$.

Solution. Supposons qu'en position inférieure la distance entre les manchons et l'axe de rotation est r et la vitesse angulaire de l'installation, ω. Alors, les lois de conservation de l'énergie et du moment cinétique par rapport à l'axe de rotation entraînent que

$$r^2\omega^2 - r_0^2\omega_0^2 = 2gh; \quad r^2\omega = r_0^2\omega_0,$$

où h est la différence des hauteurs en positions supérieure et inférieure des manchons. D'autre part (fig. 97).

$$r_0^2 = r^2 + h^2.$$

En résolvant ensemble les trois équations, on obtient

$$\omega = \left(1+\sqrt{1+(4g/r_0\omega_0^2)^2}\right)\omega_0/2.$$

● 5.5. Une tige lisse tourne librement dans un plan horizontal à une vitesse angulaire ω_0 autour d'un axe vertical fixe O (fig. 98), par rapport auquel son moment cinétique est égal à I. La tige porte près de l'axe de rotation un petit manchon de masse m, lié à cet axe par un fil. Le fil une fois brûlé, le manchon

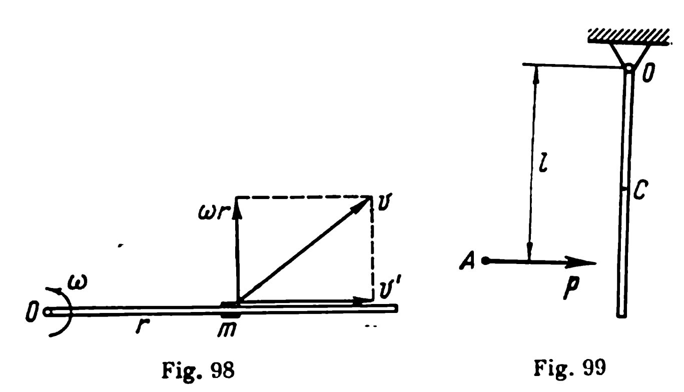


Fig. 98 Fig. 99

commence à glisser le long de la tige. Trouver la vitesse v' du manchon par rapport à la tige en fonction de sa distance r jusqu'à l'axe de rotation.

Solution. Au cours du mouvement le système donné conserve l'énergie cinétique et le moment cinétique par rapport à l'axe de rotation. Il s'ensuit que

$$I\omega_0^2 = I\omega^2 + mv^2; \quad I\omega_0 = (I+mr^2)\,\omega,$$

où $v^2 = v'^2 + \omega^2 r^2$ (fig. 98). On tire de ces équations

$$v' = \omega_0 r/\sqrt{1+mr^2/I}.$$

● 5.6. Une balle A se déplaçant horizontalement vient frapper et s'engager dans une tige verticale homogène de masse m et de longueur l_0, dont l'extrémité supérieure est fixée dans une articulation O (fig. 99). L'impulsion de la balle était $\mathbf{p}$, la balle a frappé la tige à une distance l du point O. En négligeant la masse de la balle calculer

1) l'accroissement de l'impulsion du système balle-tige pendant le déplacement de la balle dans la tige;

2) la vitesse angulaire qu'acquiert la tige compte tenu du moment cinétique propre de la balle égal à $\tilde{\mathbf{L}}$ et coïncidant en direction avec le vecteur $\mathbf{p}$ (la balle tourne autour de la direction du mouvement choisie comme axe de rotation).

Solution. 1. Le système balle-tige est un système ouvert; en plus des forces qui s'équilibrent, le mouvement de la balle dans la tige fait apparaître une composante horizontale de la force de réaction en O. C'est son action qui provoque justement l'accroissement de l'impulsion du système:

$$\Delta p = mv_C - p,$$

où v_C est la vitesse du centre d'inertie de la tige après l'engagement de la balle.

Toutes les forces extérieures de ce processus passant par O, pendant le déplacement de la balle dans la tige le moment cinétique du système restera constant par rapport à un axe passant par ce point. En retenant un axe perpendiculaire au plan du dessin, écrivons

$$lp = I\omega,$$

où I est le moment cinétique de la tige par rapport à l'axe retenu, et ω, sa vitesse angulaire immédiatement après l'arrêt de la balle dans la tige.

De ces deux équations et en vertu de $v_C = \omega r$, où r est la distance entre O et le centre d'inertie de la tige, on obtient

$$\Delta p = (3l/2l_0 - 1)\, p.$$

Il est donc clair que le signe de l'accroissement Δp dépend du rapport l/l_0. En particulier, pour $l/l_0 = 2/3$, $\Delta p = 0$, c'est-à-dire pendant le déplacement de la balle dans la tige l'impulsion du système ne change pas. Cela signifie que dans notre cas en O la composante horizontale de la force de réaction est absente.

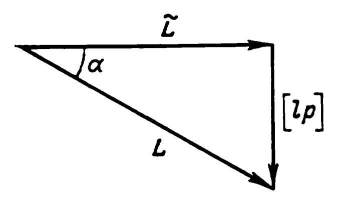


Fig. 100

2. Dans ce cas le moment cinétique du système par rapport au point O reste aussi constant pendant le déplacement de la balle dans la tige; donc, d'après (5.23)

$$\tilde{\mathbf{L}} + [\mathbf{lp}] = \mathbf{L}.$$

Ici, le premier membre est le moment cinétique de la balle par rapport à O, et le second membre, le moment cinétique de la tige (avec la balle) immédiatement après l'arrêt de la balle dans la tige (cf. fig. 100, où tous les trois vecteurs reposent dans le plan horizontal).

Calculons le vecteur $\mathbf{L}$ lorsque la tige (avec la balle) acquiert la vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$. Prenons un petit élément de la tige de masse dm qui se trouve à la distance $\mathbf{r}$ du point O. Son moment cinétique par rapport à O s'écrit

$$d\mathbf{L} = [\mathbf{r},\, dm\mathbf{v}] = dm\cdot r^2\boldsymbol{\omega} = (m\boldsymbol{\omega}/l_0)\, r^2 dr,$$

où $\mathbf{v}$ est la vitesse de l'élément donné. En intégrant cette expression sur tous les éléments, on obtient

$$\mathbf{L} = ml_0^2\boldsymbol{\omega}/3.$$

De la sorte,

$$\tilde{\mathbf{L}} + [\mathbf{lp}] = ml_0^2\boldsymbol{\omega}/3.$$

La figure 100 permet de tirer de cette expression

$$\omega = 3\sqrt{\tilde{L}^2 + l^2p^2}/ml_0^2.$$

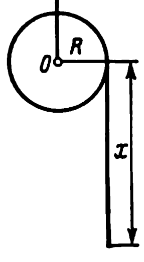


Fig. 101

A l'aide de ce même dessin on peut trouver également la direction du vecteur $\boldsymbol{\omega}$ (angle α).

● 5.7. Un cylindre continu homogène de masse m_0 et de rayon R peut tourner sans frottement autour d'un axe horizontal fixe O (fig. 101). Sur le cylindre est enroulé en une couche serrée un fil inextensible mince de longueur l et de masse m. Trouver l'accélération angulaire du cylindre en fonction de la longueur x de la partie du fil suspendue. Admettre qu'il n'y a pas de glissement et que le centre de pesanteur de la partie enroulée du fil se trouve sur l'axe du cylindre.

Solution. Utilisons l'équation des moments (5.15) par rapport à l'axe O. A cet effet trouvons le moment cinétique du système par rapport à l'axe donné L_z et le moment des forces correspondant M_z. Le moment cinétique

$$L_z = I\omega_z + Rmv = (m_0/2 + m)\, R^2\omega_z,$$

où on a tenu compte que le moment d'inertie du cylindre $I = m_0R^2/2$ et $v = \omega_z R$ (absence de glissement du fil). Le moment des forces de pesanteur exté-

rieures par rapport à l'axe O

$$M_z = Rmgx/l.$$

En dérivant L_z par rapport au temps et en portant dL_z/dt et M_z dans l'équation des moments, on obtient

$$\beta_z = 2mgx/lR\ (m_0 + 2m).$$

● 5.8. Un disque homogène de rayon r_0 repose sur un plan horizontal lisse. On place sur lui avec précaution un autre disque identique en lui communiquant au préalable une vitesse angulaire ω_0. Dans combien de temps les deux disques tourneront à la même vitesse angulaire, si le coefficient de frottement entre les disques est k?

Solution. Trouvons d'abord la vitesse angulaire stabilisée ω. La loi de conservation du moment cinétique entraîne que $I\omega_0 = 2I\omega$, où I est le moment d'inertie de chaque disque par rapport à l'axe de rotation commun. On en tire

$$\omega = \omega_0/2.$$

Maintenant examinons le comportement de l'un des disques, par exemple, du disque inférieur. Sa vitesse angulaire change sous l'action du moment M des forces de frottement. Calculons M. A cet effet extrayons de la surface supérieure du disque un anneau élémentaire de rayons r, $r + dr$. Le moment des forces de frottement qui agissent sur l'anneau considéré est

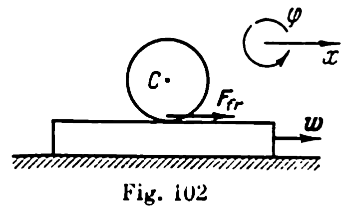


Fig. 102

$$dM = rk\,(mg/\pi r_0^2)\,2\pi r\,dr = (2kmg/r_0^2)\,r^2\,dr,$$

où m est la masse de chaque disque. En intégrant sur r de 0 à r_0, on obtient

$$M = {}^2/_3\,kmgr_0.$$

D'après l'équation (5.30), la vitesse angulaire du disque inférieur s'accroît d'une grandeur $d\omega$ en un temps

$$dt = (I/M)\,d\omega = (3r_0/4kg)\,d\omega.$$

Intégrant cette équation sur ω de 0 à $\omega_0/2$, on trouve que le temps cherché

$$t = {}^3/_8 r_0\omega_0/kg.$$

● 5.9. Un cylindre homogène repose sur une planche horizontale (fig. 102). Le coefficient de frottement entre le cylindre et la planche est k. La planche est mise en mouvement avec une accélération constante w dans le sens horizontal perpendiculaire à l'axe du cylindre. Trouver

1) l'accélération de l'axe du cylindre en l'absence de glissement;

2) la valeur limite w_{lim} pour laquelle le glissement est absent.

Solution. 1. En choisissant les directions positives de x et φ suivant la figure 102, écrivons l'équation du mouvement de l'axe du cylindre et l'équation des moments dans le système C par rapport à cet axe:

$$mw_C = F_{fr}; \qquad I\beta = rF_{fr},$$

où m et I sont la masse et le moment d'inertie du cylindre par rapport à son axe. De plus, la condition de l'absence de glissement du cylindre donne la relation cinétique des accélérations

$$w - w_C = \beta r.$$

Ces trois équations permettent d'obtenir $w_C = w/3$.

2. Trouvons à partir des équations précédentes la valeur de la force de frottement F_{fr} qui assure le roulement du cylindre sans glissement: $F_{fr} = mw/3$.

La valeur maximale possible de cette force est égale à kmg. Il s'ensuit que

$$w_{lim} = 3kg.$$

● **5.10.** Une sphère homogène de rayon r commence à rouler sans glisser à partir du sommet d'une sphère de rayon R (fig. 103). Trouver la vitesse angulaire de la sphère à l'instant où elle se détache de la surface de la deuxième sphère.

Fig. 103

Solution. Notons avant tout qu'une fois la sphère détachée, sa vitesse angulaire ne changera pas. Le problème se ramène donc au calcul de la vitesse à l'instant du détachement.

Ecrivons l'équation du mouvement du centre de la sphère à l'instant du détachement:

$$mv^2/(R + r) = mg \cos \vartheta,$$

où v est la vitesse du centre de la sphère à l'instant du détachement; ϑ, l'angle correspondant (fig. 103). La vitesse v peut s'obtenir à partir de la loi de conservation de l'énergie:

$$mgh = mv^2/2 + I\omega^2/2,$$

où I est le moment d'inertie de la sphère par rapport à l'axe passant par son centre. En outre

$$v = \omega r; \quad h = (R + r)(1 - \cos \vartheta).$$

Ces quatre équations amènent

$$\omega = \sqrt{10g(R + r)/17r^2}.$$

● **5.11.** Une tige mince homogène de masse m et de longueur l tourne à une vitesse angulaire constante ω autour d'un axe vertical, passant par le point de la suspension O de la tige (fig. 104). Dans ces conditions la tige décrit une surface conique d'angle de demi-ouverture ϑ. Chercher l'angle ϑ, ainsi que le module et la direction de la force de réaction **R** en O.

Solution. Examinons le système de référence qui tourne autour de l'axe vertical avec la tige. Dans ce système, outre la force de pesanteur $m\mathbf{g}$ et la force de réaction **R**, agit encore la force d'inertie centrifuge $\mathbf{F}_{cf}$. La tige, dans ce système de référence, étant au repos, c'est-à-dire à l'état d'équilibre, le moment résultant de toutes les forces par rapport à un point quelconque et la résultante de toutes les forces sont nuls.

Le moment par rapport à O n'est dû qu'à la force de pesanteur et aux forces d'inertie centrifuges. L'égalité des moments de ces forces entraîne

$$(mgl/2) \sin \vartheta = M_{cf}. \quad (1)$$

Fig. 104

Calculons M_{cf}. Le moment élémentaire de la force d'inertie qui agit sur un élément de la tige dx se trouvant à la distance x de O s'écrit

$$dM_{cf} = (m\omega^2/l) \sin \vartheta \cos \vartheta x^2 \, dx.$$

L'intégration sur toute la longueur de la tige donne

$$M_{cf} = (m\omega^2 l^2/3) \sin \vartheta \cos \vartheta. \quad (2)$$

(1) et (2) entraînent que

$$\cos\vartheta = 3g/2\omega^2 l. \qquad (3)$$

Trouvons maintenant le module et la direction du vecteur **R**. Dans le système de référence où la tige tourne à une vitesse angulaire ω, son centre d'inertie, le point C, se déplace suivant un cercle horizontal. La formule (4.11) exprimant la loi du mouvement du centre d'inertie entraîne donc immédiatement que la composante verticale du vecteur **R** est $R_{\parallel} = mg$, et sa composante horizontale $R_{\perp}$ est déterminée par l'équation $mw_n = R_{\perp}$, où w_n est l'accélération normale du centre d'inertie C. On en tire

$$R_{\perp} = (m\omega^2 l/2)\sin\vartheta. \qquad (4)$$

Le module du vecteur **R** s'écrit

$$R = \sqrt{(mg)^2 + R_{\perp}^2} = (m\omega^2 l/2)\sqrt{1 + 7g^2/(4\omega^4 l^2)},$$

et sa direction, donnée par l'angle ϑ' entre **R** et la verticale, est déterminée par la formule $\cos\vartheta' = mg/R$. Fait curieux: l'angle $\vartheta' \neq \vartheta$, c'est-à-dire le vecteur **R** ne coïncide pas en direction avec la tige. On s'en convainc aisément en exprimant $\cos\vartheta'$ à l'aide de $\cos\vartheta$:

$$\cos\vartheta' = 4\cos\vartheta/\sqrt{9 + 7\cos^2\vartheta}.$$

Il est donc clair que $\cos\vartheta' > \cos\vartheta$, c'est-à-dire $\vartheta' < \vartheta$, ce qui est visualisé par la figure 104.

Notons que la résultante des forces d'inertie $\mathbf{F}_{cf}$ passe non pas par le point C, mais plus bas. En effet, $F_{cf} = R_{\perp}$; cette force est déterminée par la formule (4), alors que le moment résultant M_{cf}, par la formule (2). Ces formules amènent que le bras du vecteur $\mathbf{F}_{cf}$ par rapport à O est égal à $(2l/3)\cos\vartheta$ (fig. 104).

Fig. 105

● **5.12.** Une toupie de masse m dont l'axe compose avec la verticale un angle ϑ, effectue une précession autour de l'axe vertical qui passe par le point d'appui O. Le moment cinétique de la toupie est L, la distance entre son centre d'inertie et O est l. Trouver le module et la direction du vecteur **F** qui est la composante horizontale de la force de réaction en O.

Solution. D'après (5.38), la vitesse angulaire de la précession

$$\omega' = mgl/L.$$

Le centre d'inertie de la toupie se déplace suivant un cercle; par conséquent, le vecteur **F** est dirigé suivant la figure 105 (ce vecteur effectue une précession avec l'axe de la toupie).

L'équation du mouvement du centre d'inertie donne

$$m\omega'^2 l\sin\vartheta = F.$$

Il en résulte

$$F = (m^3 g^2 l^3/L^2)\sin\vartheta.$$

Notons que si le point d'appui de la toupie reposait sur un plan absolument lisse, la toupie effectuerait la précession avec la même vitesse angulaire, mais autour d'un axe vertical passant par le centre de la toupie, le point C de la figure 105.

DEUXIÈME PARTIE

MÉCANIQUE RELATIVISTE

CHAPITRE 6

CINÉMATIQUE DE LA THÉORIE DE LA RELATIVITÉ RESTREINTE

§ 6.1. Introduction

La théorie de la relativité restreinte créée par Einstein en 1905 signifiait la révision totale des idées de la physique classique et surtout de ses notions de l'espace et du temps. C'est pourquoi le contenu essentiel de cette branche scientifique autorise à dire qu'elle est la théorie *physique* de l'espace et du temps. L'adjectif physique s'emploie ici dans le sens que les propriétés de l'espace et du temps examinées dans cette théorie sont intimement liées aux lois qui régissent les phénomènes physiques dont l'espace et le temps sont le siège. Le terme « restreinte » traduit le fait que cette théorie n'a pour l'objet que l'étude des phénomènes se déroulant dans les systèmes de référence galiléens.

Nous commencerons cette partie par une révision sommaire de la physique prérelativiste pour indiquer les sources des difficultés qui ont conduit à l'apparition de la théorie de la relativité.

Généralités de la physique prérelativiste. Rappelons d'abord celles des idées sur l'espace et le temps qui sont liées aux lois de Newton, c'est-à-dire reposent à la base de la mécanique classique.

1. L'espace à trois dimensions observe la géométrie euclidienne.

2. Outre l'espace tridimensionnel il existe un temps indépendant de l'espace (indépendant au même sens que le sont les trois dimensions de l'espace entre elles). Mais, d'autre part, le temps est lié à l'espace par les lois du mouvement. En effet, le temps est mesuré à l'aide des horloges qui en principe sont des appareils fonctionnant à partir d'un tel ou tel processus périodique qui donne l'échelle du temps. Il est donc impossible de déterminer le temps indépendamment d'un processus périodique, c'est-à-dire sans le rapporter au mouvement.

3. Les dimensions des solides (échelles) et les intervalles de temps entre les événements donnés sont les mêmes dans des systèmes de référence différents. Ceci correspond à la conception newtonienne de l'espace et du temps absolus, selon laquelle leurs propriétés ne dépendent pas du système de référence: quel que soit ce système, l'espace et le temps sont identiques.

4. On reconnaît la validité de la loi d'inertie de Galilée — Newton, d'après laquelle un corps non soumis à l'action d'autres corps, se déplace d'un mouvement rectiligne et uniforme. Cette loi affirme l'existence des systèmes de référence galiléens qui vérifient les lois de Newton (ainsi que le principe de relativité de Galilée).

5. Ces idées conduisent aux transformations de Galilée qui expriment la liaison spatio-temporelle d'un événement dans des systèmes de référence galiléens différents. Si le système de référence K' se déplace par rapport au système K à une vitesse $\mathbf{V}$ (fig. 106) et l'origine du temps correspond à l'instant où les origines O' et O des coordonnées des deux systèmes de référence coïncident, alors *

$$x' = x - Vt; \quad y' = y; \quad t' = t. \tag{6.1}$$

Il s'ensuit que les coordonnées d'un événement sont relatives, c'est-à-dire ont des valeurs différentes dans des systèmes de référence différents; quant à l'instant où l'événement se produit, il est le même dans des systèmes différents. Ceci signifie que dans des systèmes de référence différents le cours du temps est le même. Cette circonstance semblait si évidente, qu'on ne la formulait même pas comme un postulat spécial.

(6.1) entraîne immédiatement la loi classique de la transformation (composition) des vitesses:

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{V}, \tag{6.2}$$

où $\mathbf{v}'$ et $\mathbf{v}$ sont les vitesses du point (de la particule) dans les systèmes de référence K' et K.

6. Le principe de relativité de Galilée est respecté: du point de vue mécanique tous les systèmes de référence galiléens sont équivalents entre eux, toutes les lois de la mécanique sont les mêmes dans ces systèmes de référence, ou autrement dit, sont invariants par rapport aux transformations de Galilée.

7. Le principe de l'action à distance est observé: les interactions des corps se propagent instantanément, c'est-à-dire à une vitesse infinie.

Ces idées de la mécanique classique étaient en parfait accord avec l'ensemble des données d'expérience de l'époque (notons, d'ailleurs, qu'elles se rapportaient à l'étude des mouvements des corps à des vitesses sensiblement inférieures à celle de la lumière). En leur faveur témoignait également l'essor de la mécanique elle-même. Aussi, les idées de la mécanique classique sur les propriétés de l'espace et du temps se sont-elles tellement enracinées, que personne ne pouvait douter de leur validité.

---

* Là et dans ce qui suit nous nous bornerons seulement aux deux coordonnées spatiales x et y, la coordonnée z étant sous tous les rapports absolument identique à y.

La première épreuve a porté sur le principe de relativité de Galilée qui, comme on le sait, ne concerne que la mécanique, branche unique de la physique qui avait atteint à cette époque un niveau de développement suffisant. A mesure que d'autres branches de la physique progressaient, et notamment l'optique et l'électrodynamique, une question venait naturellement à l'esprit, à savoir si le principe de relativité concernait également les autres phénomènes? Si la réponse est négative, on peut en principe distinguer à l'aide de ces phénomènes (non mécaniques) les systèmes de référence galiléens et se demander s'il existe un système de référence principal ou absolu.

On s'attendait que l'un de ces phénomènes dont la marche est différente dans des systèmes de référence différents est la propagation de la lumière. D'après la théorie ondulatoire dominante à l'époque, les ondes lumineuses devaient se propager à une vitesse définie par rapport à un milieu hypothétique (l'« éther porteur de la lumière »), sur la nature duquel on n'avait pas, il est vrai, d'opinion unique. Mais quelle que soit sa nature, ce milieu ne pouvait pas être au repos simultanément dans tous les systèmes galiléens. Par là même on rendait privilégié l'un des systèmes galiléens, le système absolu, celui qui était immobile par rapport à l'« éther porteur de la lumière ». On admettait que dans ce système, et seulement dans ce système, la lumière se propage à la même vitesse c dans toutes les directions. Si un certain système de référence galiléen se déplace par rapport à l'éther à une vitesse $\mathbf{V}$, dans ce système la vitesse de la lumière $\mathbf{c}'$ doit vérifier la loi ordinaire de composition des vitesses (6.2), c'est-à-dire $\mathbf{c}' = \mathbf{c} - \mathbf{V}$.

Il s'est avéré que cette hypothèse pouvait être vérifiée expérimentalement, tâche réalisée par Michelson et Morly.

Expérience de Michelson. Elle avait pour objectif de découvrir le mouvement « authentique » de la Terre par rapport à l'éther. A cet effet on a utilisé le mouvement de la Terre sur son orbite à la vitesse de 30 km/s. Voici l'idée de cette expérience.

La lumière d'une source S (fig. 107) était émise dans deux directions réciproquement perpendiculaires, pour être reflétée par deux miroirs A et B qui se trouvaient à la même distance de la source S, et revenir vers S. Dans cette expérience on comparait le temps que mettait la lumière pour couvrir les deux parcours SAS et SBS.

Supposons que l'installation se déplace avec la Terre de façon que sa vitesse $\mathbf{V}$ par rapport à l'éther soit dirigée le long de SA (à l'instant de la réalisation de l'expérience). Si la vitesse de la lumière obéit à la loi ordinaire de composition des vitesses (6.2), sur le parcours SA sa vitesse par rapport à l'installation (Terre) doit être égale à $c - V$, et sur le parcours de retour, à $c + V$. Alors, le temps nécessaire pour couvrir le parcours SAS est égal à

$$t_{\parallel} = \frac{l}{c-V} + \frac{l}{c+V} = \frac{2l}{c}\,\frac{1}{1-(V/c)^2}\,.$$

Quant au parcours SBS, la vitesse de la lumière par rapport à l'installation doit être égale à $c' = \sqrt{c^2 - V^2}$ (fig. 107) et le temps nécessaire pour couvrir ce parcours est

$$t_{\perp} = \frac{2l}{\sqrt{c^2 - V^2}} = \frac{2l}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}.$$

La comparaison des expressions de $t_{\parallel}$ et $t_{\perp}$ rend clair que la lumière doit couvrir les deux parcours en des temps différents. En mesurant

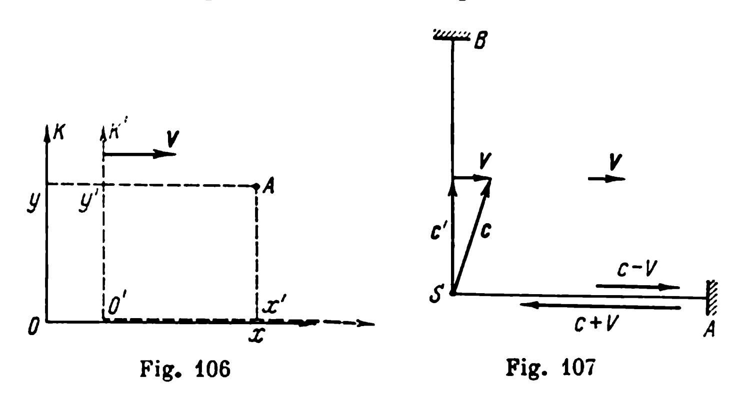


Fig. 106 Fig. 107

la différence des temps $t_{\parallel} - t_{\perp}$ on peut déterminer la vitesse de l'installation (de la Terre) par rapport à l'éther.

Bien que la différence des temps prévue soit fort petite, l'installation était assez sensible pour la déceler sûrement à l'aide d'une méthode différentielle très précise.

Or, l'expérience s'est soldée par un résultat négatif, la différence des temps n'ayant pas été décelée. Il se pouvait évidemment que par hasard à l'instant de la réalisation de l'expérience, la Terre était au repos par rapport à l'éther. Mais alors dans six mois, par exemple, la vitesse de la Terre par rapport à l'éther devait atteindre 60 km/s. Or, la reprise de l'expérience six mois plus tard n'a pas abouti non plus.

Des expériences plus précises de même genre montées par la suite n'ont fait que confirmer le résultat initial.

Le résultat négatif de l'expérience de Michelson contredisait ce qu'on prévoyait en se fondant sur les transformations de Galilée (transformations des vitesses). Il a montré également qu'il est impossible de déceler le mouvement par rapport à l'éther, que la vitesse de la lumière ne dépend pas de la vitesse de sa source (en effet, dans des saisons différentes une source se déplace par rapport à l'éhter d'une façon différente).

Certaines observations astronomiques (par exemple, celles des étoiles doubles), d'autres expériences encore montées spécialement

pour vérifier le fait témoignent de l'indépendance de la vitesse de la lumière par rapport à celle de sa source.

Le début du XXe siècle a été marqué dans la physique théorique et expérimentale par une situation particulière. D'une part, on a prédit théoriquement divers effets qui dégagent de nombreux systèmes de référence galiléens le système principal (absolu). D'autre part, des tentatives soutenues de découvrir ces effets par l'expérience conduisaient invariablement à un échec. L'expérience confirmait sans fléchir la validité du principe de la relativité pour tous les phénomènes, y compris pour ceux que la théorie considérait comme absolument inacceptables.

Tout une série de tentatives entreprises pour expliquer dans le cadre de la mécanique classique le résultat négatif de l'expérience de Michelson et de ses analogues se sont avérées stériles. Ce n'est que la Relativité d'Einstein qui a permis de résoudre le problème d'une façon cardinale.

§ 6.2. Postulats d'Einstein

Une analyse approfondie de toutes les données expérimentales et théoriques disponibles vers le début du XXe siècle a poussé Einstein à la révision des hypothèses initiales de la physique classique, en premier lieu de celles qui concernent les propriétés de l'espace et du temps. Il en a résulté une théorie, la relativité restreinte, couronnement logique de la physique classique dans son ensemble.

Cette théorie admet sans modifier les thèses de la mécanique classique telles que l'espace euclidien et la loi d'inertie de Galilée-Newton. Quant à l'affirmation suivant laquelle les dimensions des solides et les intervalles de temps sont invariables dans des systèmes de référence différents, l'attention d'Einstein a été attirée par le fait que l'apparition de ces idées est due à l'étude du mouvement des corps à de faibles vitesses; donc, rien ne justifie leur extrapolation au domaine de grandes vitesses. Seule l'expérience peut dire quelles sont leurs propriétés réelles. Ceci se rapporte également aux transformations de Galilée et au principe d'action à distance.

A titre de points de départ Einstein a adopté pour la théorie de la relativité restreinte deux postulats ou principes, en faveur desquels témoignent toutes les données expérimentales (et en premier lieu, l'expérience de Michelson):

1) le principe de relativité;

2) l'indépendance de la vitesse de la lumière par rapport à la vitesse de la source.

Le premier postulat est la généralisation du principe de relativité de Galilée aux processus physiques quelconques: *dans tous les systèmes galiléens la démarche de tous les phénomènes physiques est la même; toutes les lois de la nature et les équations qui les décrivent sont invariantes, c'est-à-dire ne changent pas lors du passage d'un système*

galiléen à un autre. Autrement dit, *tous les systèmes galiléens sont équivalents* (indiscernables) *quant à leurs propriétés physiques*; aucune expérience ne peut permettre en principe de dégager parmi ces systèmes un système comme préférentiel.

Le **deuxième postulat** affirme que *la vitesse de la lumière dans le vide ne dépend pas du mouvement de sa source et est la même dans toutes les directions.* Ceci traduit le fait que *dans le vide la vitesse de la lumière est la même dans tous les systèmes galiléens.* Ainsi, la vitesse de la lumière joue dans la nature un rôle particulier. A la différence de toutes les autres vitesses qui changent en passant d'un système de référence à l'autre, la vitesse de la lumière dans le vide est une grandeur invariante. Nous allons voir que l'existence d'une telle vitesse change radicalement nos idées sur l'espace et le temps.

Les postulats d'Einstein démontrent également que la vitesse de la lumière dans le vide est une vitesse *limite*: aucun signal, aucune action d'un corps sur un autre ne peuvent se propager plus vite. C'est justement le fait que c'est une vitesse limite qui explique pourquoi elle est la même dans tous les systèmes de référence. En effet, d'après le principe de relativité, dans tous les systèmes galiléens les lois de la nature doivent être les mêmes. Le fait que la vitesse d'un signal ne peut dépasser la valeur limite est également une loi de la nature. Il s'ensuit que la valeur de la vitesse limite, celle de la lumière dans le vide, doit être la même dans tous les systèmes galiléens.

En particulier, l'existence de la vitesse limite suppose que la vitesse des particules est limitée par la grandeur c. S'il n'en était pas ainsi, ces particules pourraient transmettre des signaux (ou des interactions entre les corps) à une vitesse plus grande que la limite. De la sorte, d'après les postulats d'Einstein, toutes les vitesses des corps et de la propagation des interactions sont limitées dans la nature par la grandeur c. Par là même le principe d'action à distance de la mécanique classique se trouve invalidé.

Tout le contenu de la théorie de la relativité restreinte se déduit de ces deux postulats. De nos jours ces derniers, ainsi que tous leurs corollaires sont confirmés d'une manière probante par l'ensemble des données expérimentales accumulées.

Synchronisation des horloges. Avant de tirer des conclusions de ces postulats, Einstein a analysé scrupuleusement les idées et les modes de mesure de l'espace et du temps. Son attention a été attirée tout d'abord par le fait qu'il n'y a que l'*événement* qui possède une réalité physique, et non pas un point de l'espace ou un instant de temps dans lesquels se situe ce phénomène. Pour décrire un événement dans le système de référence donné il faut indiquer le lieu et l'instant de sa réalisation.

La position du point où se produit un événement peut être définie à l'aide des échelles rigides par les méthodes de la géométrie

euclidienne et exprimée en coordonnées cartésiennes. A cet effet la mécanique classique faisait appel à des procédés parfaitement réels de comparaison des grandeurs mesurées avec les étalons.

Quant à l'instant correspondant, il peut être déterminé avec une horloge placée au point du système de référence où se produit l'événement. Or, cette détermination devient insuffisante dès qu'il faut comparer des événements qui se produisent en des lieux *différents*, ou ce qui revient au même, comparer le temps des événements qui se produisent loin de l'horloge.

En effet, pour comparer le temps (la lecture de l'horloge) en différents points d'un système de référence, il faut établir d'abord le mode de détermination du temps *commun* à tous les points du système donné; en d'autres termes il faut assurer la marche *synchronisée* de toutes ses horloges.

Il est clair que les horloges placées en différents points d'un système ne peuvent être synchronisées qu'à l'aide de quelques signaux. Les signaux les plus rapides qui conviennent à cet effet ce sont les signaux lumineux ou radio qui se propagent à la vitesse c connue. Le choix de ces signaux est encore conditionné par leur vitesse qui ne dépend pas de la direction dans l'espace et est la même dans tous les systèmes galiléens.

Ensuite, on peut procéder de la façon suivante. L'observateur placé, par exemple, à l'origine des coordonnées O du système de référence donné déclare par radio: « Nous transmettons le signal du temps exact. D'après mon horloge il est t_0 ». A l'instant où ce signal atteindra l'horloge placée à la distance r connue du point O, on règle celle-ci pour qu'elle montre $t = t_0 + r/c$, c'est-à-dire qu'elle tient compte du retard du signal. La répétition du signal dans des intervalles de temps définis permet à chaque observateur de synchroniser son horloge avec celle de O. La réalisation de cette opération permettra d'affirmer que toutes les horloges du système donné montrent à chaque instant le même temps général.

Il importe de noter que le temps ainsi déterminé ne se rapporte qu'à celui des systèmes de référence par rapport auquel les horloges synchronisées sont au repos.

Relations entre les événements. Considérons les relations spatiales et temporelles entre les événements dans des systèmes galiléens différents.

Même en mécanique classique les relations spatiales entre les différents événements étaient envisagées suivant le système de référence auquel ces événements se rapportent. Par exemple, deux allumages successifs d'une ampoule dans un train en marche se produisent au même point du référentiel lié au train, mais en points différents du référentiel lié à la voie ferrée. L'affirmation que deux événements se produisent à des temps différents en un même lieu ou à une certaine distance l'un de l'autre n'acquiert un sens que lors-

qu'on indique le système de référence auquel se rapporte cette affirmation.

En mécanique classique les relations temporelles entre les événements sont considérées, à la différence des relations spatiales, comme ne dépendant pas du système de référence. Cela signifie que si deux événements sont simultanés dans un système, ils le sont également dans tous les autres. En général, la mécanique classique envisage l'intervalle de temps entre deux événements donnés comme identique dans tous les systèmes de référence.

Il est pourtant facile de voir qu'il n'en est pas ainsi: la *simultanéité* (et, donc, la marche du temps) est une *notion relative* qui n'ac-

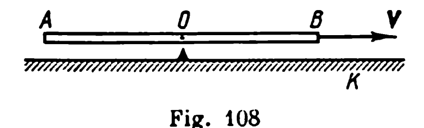


Fig. 108

quiert un sens que lorsqu'on indique le système auquel cette notion se rapporte. Montrons par un raisonnement bien simple que deux événements simultanés dans un système de référence ne le sont pas dans un autre.

Imaginons une tige AB se déplaçant à une vitesse constante V par rapport au système de référence K. Au milieu de la tige, en O, se trouve une ampoule électrique et aux extrémités, aux points A et B, des cellules photo-électriques (fig. 108). Supposons qu'à un certain moment l'ampoule produit un bref éclat de lumière. Puisque dans le système de référence lié à la tige (comme dans tout système galiléen) la lumière se propage dans deux directions à la même vitesse c, les impulsions lumineuses atteindront au même instant les cellules photo-électriques A et B équidistantes de O (dans le référentiel « tige »), qui, toutes les deux, seront déclenchées simultanément.

Il en est tout autrement dans le système K. Là aussi dans les deux directions la vitesse des impulsions lumineuses est égale à c, mais leurs parcours sont différents. En effet, tant que les impulsions lumineuses vont vers les points A et B, ces derniers se déplacent à droite (fig. 108) et, par conséquent, la cellule A fonctionnera avant la cellule B.

De la sorte, les événements simultanés dans un système, ne le sont pas dans un autre, c'est-à-dire à la différence des notions adoptées en mécanique classique, la simultanéité est une notion relative. Or, cela signifie à son tour que dans des systèmes de référence différents le temps s'écoule d'une façon différente.

Si nous avions à notre disposition des signaux qui se propageraient instantanément, les événements simultanés dans un système de référence le seraient également dans tout autre système. Ceci

résulte immédiatement de l'exemple que nous venons d'envisager. Dans ce cas la marche du temps ne dépendrait pas du système de référence et il serait possible de parler du temps absolu qui figure dans les transformations de Galilée. Ainsi, ces dernières s'inspirent au fond de l'hypothèse sur la synchronisation des horloges à l'aide des signaux dont la propagation est instantanée. Or, des signaux de cette sorte n'existent pas.

§ 6.3. Ralentissement du temps et raccourcissement de la longueur

Dans ce paragraphe nous examinerons trois corollaires les plus importants qui découlent des postulats d'Einstein pour des systèmes de référence différents: égalités des dimensions transversales des corps en mouvement, ralentissement des horloges et raccourcissement des dimensions longitudinales des corps en mouvement; ensuite (au § 6.4), nous généraliserons les résultats obtenus sous la forme de formules correspondantes de transformation des coordonnées et du temps.

En abordant l'exposé de ces questions rappelons d'abord que par système de référence ou référentiel on entend un repère auquel sont liées des coordonnées et plusieurs horloges identiques fixes synchronisées entre elles. Ensuite on suppose que dans tout système galiléen les coordonnées et les horloges sont graduées de la *même* façon. Il est clair que ceci ne peut se faire qu'à l'aide des étalons de longueur et de temps, réalisés aussi de la même façon dans tous les systèmes de référence.

A cet effet il suffit d'utiliser un processus périodique naturel qui donne aussi bien l'échelle de longueur que celle du temps, par exemple, l'une des ondes monochromatiques émises par des atomes définis fixes dans le système de référence donné. On peut prendre alors dans ce système comme étalon de longueur la longueur d'onde, et comme étalon de temps, la période d'oscillation correspondante. Ces étalons peuvent s'employer pour construire *un mètre* — étalon à partir d'un nombre défini de longueurs d'onde et *une seconde* — étalon, à partir d'un nombre défini d'oscillations données (notons que c'est justement ainsi qu'on procède de nos jours).

Une opération analogue peut être effectuée dans chaque système galiléen en utilisant la même onde monochromatique de mêmes atomes fixes dans chacun de ces systèmes. Cette opération est fondée sur le fait que d'après le principe de relativité les propriétés physiques des atomes au repos ne dépendent pas du système de référence dans lequel ils reposent.

Après avoir réalisé dans chaque système de référence les étalons de longueur et de temps, on peut s'attaquer à la tâche fondamentale qui consiste à comparer ces étalons dans des systèmes de référence

différents, ou autrement dit, à comparer les dimensions des corps et la marche du temps dans ces systèmes.

Egalité des dimensions transversales des corps. Commençons par la comparaison des dimensions transversales des corps dans différents systèmes galiléens. Imaginons deux systèmes K et K', dont les axes y et y' sont parallèles entre eux et perpendiculaires à la direction du mouvement d'un système par rapport à l'autre (fig. 109), le déplacement de l'origine O' de K' étant rectiligne et passant par l'origine O de K. Plaçons le long des axes y et y' les tiges OA et $O'A'$ qui sont des étalons de mètre dans chacun de ces systèmes de référence. Imaginons ensuite qu'à l'instant où les axes y' et y coïncident, le bout supérieur de la tige gauche marquera l'axe y du système K. Cette marque coïncidera-t-elle avec le point A, bout supérieur de la tige droite?

Le principe de relativité permet de répondre à cette question par l'affirmative. S'il n'en était pas ainsi, du point de vue *des deux* systèmes de référence l'une des tiges s'avérerait, par exemple, plus courte que l'autre, et donc rendrait possible de distinguer expérimentalement l'un des systèmes galiléens de l'autre à l'aide des dimensions transversales plus courtes. Or, ceci contredit le principe de relativité.

On en tire que les dimensions transversales des corps sont les mêmes dans tous les systèmes galiléens. Cela signifie également qu'avec le choix indiqué des origines de K' et K, les coordonnées y' et y d'un point ou d'un événement coïncident, c'est-à-dire

$$y' = y. \tag{6.3}$$

Cette relation constitue l'une des transformations des coordonnées cherchées.

Ralentissement du temps. Notre tâche suivante consiste à comparer la marche du temps dans divers systèmes galiléens. Nous avons déjà dit que le temps est mesuré avec des horloges, en entendant par horloge tout appareil qui utilise tel ou tel processus périodique. Il est donc d'usage dans la théorie de la relativité de comparer la marche des horloges identiques dans des systèmes galiléens différents.

La façon la plus simple de remplir cette tâche est d'entreprendre l'expérience imaginaire suivante (en principe, possible). Prenons ce qu'on appelle une *horloge lumineuse*, tige munie à ses extrémités de miroirs entre lesquels « circule » une courte impulsion lumineuse. La période d'une telle horloge est égale à l'intervalle de temps entre deux instants successifs lorsque l'impulsion lumineuse atteint l'une des extrémités de la tige.

Imaginons ensuite deux systèmes galiléens K' et K se déplaçant l'un par rapport à l'autre à la vitesse V. Supposons que l'horloge lumineuse AB est fixe dans K' et orientée perpendiculairement à la

direction de son mouvement par rapport à K (fig. 110). Observons maintenant la « marche » de cette horloge dans les deux systèmes: K' et K.

Dans K' l'horloge est fixe et sa période est

$$\Delta t_0 = 2l/c,$$

où l est la distance entre les miroirs.

Dans le système K par rapport auquel l'horloge se déplace, la distance entre les miroirs est également l, puisque les dimensions

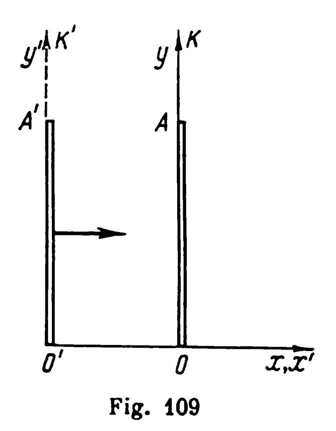


Fig. 109

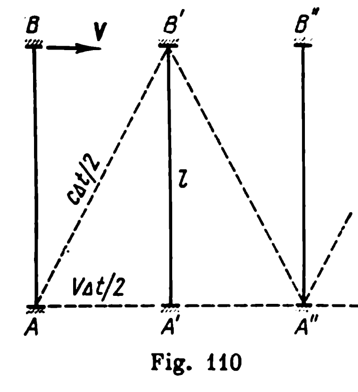


Fig. 110

transversales sont les mêmes dans des référentiels galiléens différents. Pourtant, dans K le trajet de l'impulsion lumineuse sera différent, il aura la forme de zigzags (fig. 110): pendant que l'impulsion lumineuse se propage du miroir inférieur au miroir supérieur, ce dernier se déplacera à une certaine distance à droite, etc. Pour revenir au miroir inférieur l'impulsion lumineuse parcourt dans K une distance plus grande et à la même vitesse c. Donc, la lumière devra mettre à cet effet *plus* de temps que dans le cas d'une horloge fixe. La période de l'horloge en mouvement sera donc plus longue et du point de vue du système K sa marche sera plus *lente*.

Notons la période de l'horloge en mouvement dans le système K par Δt. Le triangle rectangle $AB'A'$ (fig. 110) entraîne que $l^2 + (V\Delta t/2)^2 = (c\Delta t/2)^2$, d'où

$$\Delta t = (2l/c)/\sqrt{1 - (V/c)^2}.$$

Et puisque $2l/c = \Delta t_0$, il vient

$$\boxed{\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\beta^2}},} \qquad (6.4)$$

où $\beta = V/c$; V, la vitesse de l'horloge dans le système K.

On en tire que $\Delta t > \Delta t_0$, c'est-à-dire la même horloge dans des systèmes galiléens différents marche de façon différente : dans le système de référence par rapport auquel l'horloge est en mouvement sa marche est plus lente que dans le système par rapport auquel elle est au repos. Autrement dit, *la marche d'une horloge en mouvement est plus lente que celle d'une horloge au repos*. Ce phénomène s'appelle *ralentissement du temps*.

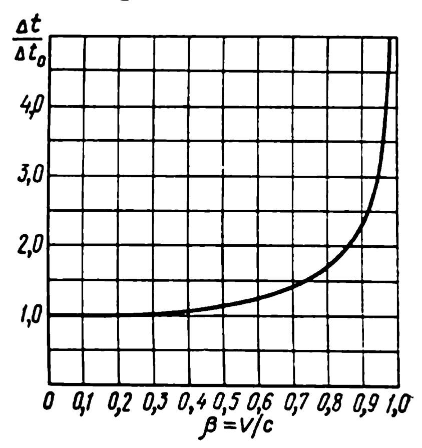


Fig. 111

Le temps lu sur une horloge se déplaçant avec le corps qui est le siège d'un processus quelconque s'appelle *temps propre* de ce corps. On le note Δt_0. Il résulte de (6.4) que le temps propre est le plus court. Le temps Δt de ce même processus dans un autre système de référence dépend de la vitesse V de ce dernier par rapport au corps qui est le siège du processus. Cette relation devient particulièrement évidente lorsqu'il s'agit des vitesses V comparables à celle de la lumière (fig. 111).

Exemple. Une horloge se déplace à la vitesse v dans le système de référence K d'un mouvement rectiligne et uniforme. A l'instant initial $t = 0$ sa lecture coïncide avec celle de l'horloge du système K. Quel retard en secondes enregistrera l'horloge en mouvement pendant $t = 60$ mn (ce temps est celui d'après l'horloge du système K), si

1. $v = 1800$ km/h (avion à réaction);
2. $v = {}^4/_5\, c$, où c est la vitesse de la lumière?

Si à l'instant t d'après l'horloge du système K l'horloge en mouvement montrait t_0, et en plus, d'après la formule (6.4), $t_0 = t\sqrt{1-(v/c)^2}$, alors le temps cherché

$$t - t_0 = t\,[1 - \sqrt{1-(v/c)^2}].$$

a) Avec $v \ll c$, d'après la formule du binôme de Newton, $\sqrt{1-(v/c)^2} \approx \approx 1 - {}^1/_2\,(v/c)^2$, et $t - t_0 = {}^1/_2\,(v/c)^2\,t = 5\cdot 10^{-9}$ s.

b) $t - t_0 = {}^2/_5 t = 24$ mn.

De la sorte, à la différence de la mécanique classique, la marche du temps dépend en fait de l'état du mouvement. Il n'existe pas de temps universel unique et la notion d'« intervalle de temps entre deux événements donnés » est relative. L'affirmation : deux événements donnés sont séparés par tant de secondes acquiert un sens seulement lorsqu'on indique le système de référence auquel cette affirmation se rapporte.

Dans la théorie de la relativité, le temps absolu de la mécanique classique devient une notion approchée, vraie seulement pour de

faibles vitesses relatives des systèmes de référence (par rapport à la vitesse de la lumière). Ceci est immédiat d'après (6.4) et devient clair de la figure 111 : avec $V \ll c$, $\Delta t \approx \Delta t_0$.

Ainsi nous sommes amenés à la conclusion fondamentale que dans un système de référence qui se déplace avec l'horloge le temps est plus lent que pour un observateur par rapport auquel l'horloge donnée se déplace. Il en est ainsi également de tous les processus qui ont lieu dans des systèmes de référence se déplaçant par rapport à l'observateur.

La question se pose alors tout naturellement, à savoir si l'observateur d'un système K' se déplaçant par rapport au système K remarquera que la marche de son horloge est plus lente que celle de l'horloge de K ? Or, il ne le remarquera pas. Ceci résulte directement du principe de relativité. Si l'observateur K' découvrait aussi le ralentissement du temps dans son système de référence, cela signifierait que pour *les deux* observateurs K' et K dans un des systèmes galiléens la marche du temps est plus lente. Ils en viendraient à conclure que l'un des systèmes galiléens se distingue de l'autre, ce qui infirmerait le principe de relativité.

Il s'ensuit que l'effet du ralentissement du temps est réciproque, symétrique par rapport aux deux systèmes galiléens K et K'. Autrement dit, si du point de vue du système K l'horloge du système K' retarde, du point de vue du système K', c'est l'inverse, c'est l'horloge du système K qui retarde (et ceci sous le même rapport). C'est là un témoignage du fait que *le phénomène du ralentissement du temps est purement cinématique*. Cette conséquence se déduit inévitablement de l'invariance de la vitesse de la lumière et ne peut d'aucune façon être incriminée à l'un quelconque des changements des propriétés des horloges conditionné par leur mouvement.

La formule (6.4) a trouvé une confirmation expérimentale immédiate en permettant d'expliquer le comportement à première vue « mystérieux » des muons lors de leur passage par l'atmosphère terrestre. Les muons sont des particules instables qui se désagrègent spontanément en moyenne en $2 \cdot 10^{-6}$ s (temps mesuré lorsqu'ils sont immobiles ou se déplacent à de faibles vitesses). Les muons sont créés dans les couches supérieures de l'atmosphère à 20 ou 30 km d'altitude. Si la durée de vie des muons ne dépendait pas de la vitesse, en se déplaçant même à la vitesse de la lumière ils ne pourraient parcourir une voi-plus grande que $c\Delta t = 3 \cdot 10^8$ m/s$\cdot 2 \cdot 10^{-6}$ s $= 600$ m. Or, les observations montrent qu'une partie importante de ces particules atteignent quand même la surface terrestre.

Ceci s'explique par le fait que le temps $2 \cdot 10^{-6}$ s est le temps propre Δt_0 de la vie des muons, c'est-à-dire le temps d'après une horloge se déplaçant avec ces particules. Quant au temps marqué par une horloge terrestre, d'après (6.4) il doit être sensiblement plus grand (la vitesse de ces particules est voisine de celle de la lumière) et s'avère suffisant pour que les muons atteignent la surface de la Terre.

A titre de conclusion quelques mots sur ce qu'on appelle le « *paradoxe des horloges* » ou le « *paradoxe des jumeaux* ». Supposons

qu'il y a deux horloges identiques A et B, dont A est fixe dans un système galiléen, alors que B s'éloigne d'abord de A, puis revient vers elle. On suppose qu'à l'instant initial, lorsque les horloges se trouvaient ensemble, elles montraient le même temps.

Du « point de vue » de l'horloge A, c'est l'horloge B qui est en mouvement, elle marche donc plus lentement et au retour retarderait par rapport à A. Alors que du « point de vue » de l'horloge B, c'est l'inverse, c'est A qui se déplace, et au retour c'est elle qui sera en retard. Cette contradiction évidente traduit le sens du « paradoxe ».

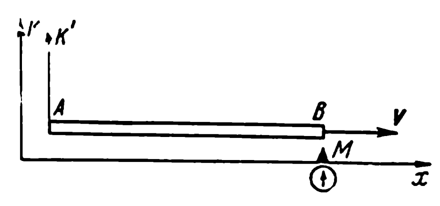


Fig. 112

En fait, ces raisonnements commettent une erreur de principe. Cette erreur concerne le « point de vue » de l'horloge B, puisque le système de référence qui lui est lié est non galiléen (d'abord il s'éloigne en accélérant, puis s'approche) et dans le cas considéré, il est illégitime d'utiliser les résultats se rapportant seulement aux systèmes galiléens. Un calcul détaillé qui dépasse le cadre de la Relativité restreinte, montre que la marche de l'horloge qui se déplace avec accélération (dans notre cas l'horloge B) est plus lente ; donc, c'est précisément B qui sera en retard lors du retour.

Contraction de Lorentz. Supposons qu'une tige AB se meut par rapport au système de référence K à une vitesse constante V (fig. 112) et que sa longueur dans le système de référence K' qui lui est lié est égale à l_0. Proposons-nous de calculer la longueur de la tige l dans le système K.

A cet effet effectuons en pensée l'expérience suivante. Faisons sur l'axe des x du système K une marque M et plaçons près d'elle une horloge. Enregistrons d'après cette horloge l'intervalle de temps Δt_0 que la tige met pour passer par M. On peut alors affirmer, que dans K la longueur cherchée de la tige

$$l = V\Delta t_0.$$

Pour un observateur lié à la tige, l'intervalle de temps que la tige met pour passer par M sera différent. En effet, pour lui l'horloge qui a montré Δt_0 pour le passage par M, se déplace à la vitesse V et, par suite, elle montre un temps qui lui n'est pas « propre ». Pour cet observateur le temps « propre » du passage Δt sera d'après (6.4) plus grand. Il peut se calculer d'après la relation

$$l_0 = V\Delta t.$$

Ces deux équations permettent d'obtenir en vertu de (6.4)

$$l/l_0 = \Delta t_0/\Delta t = \sqrt{1-\beta^2},$$

ou

$$\boxed{l = l_0 \sqrt{1-\beta^2}.} \qquad (6.5)$$

où $\beta = V/c$. La longueur l_0 mesurée dans le système de référence où la tige est fixe s'appelle *longueur propre.*

De cette façon, la dimension longitudinale d'une tige en mouvement s'avère inférieure à sa longueur propre, c'est-à-dire $l < l_0$. Ce phénomène s'appelle *contraction de Lorentz.* Notons que cette contraction concerne seulement les dimensions longitudinales des corps (dimensions dans le sens du mouvement), alors que les dimensions transversales ne changent pas. Par rapport à la forme dans un système de référence où un corps est au repos, sa forme dans un système de référence mouvant peut être caractérisée comme aplatie dans le sens du mouvement.

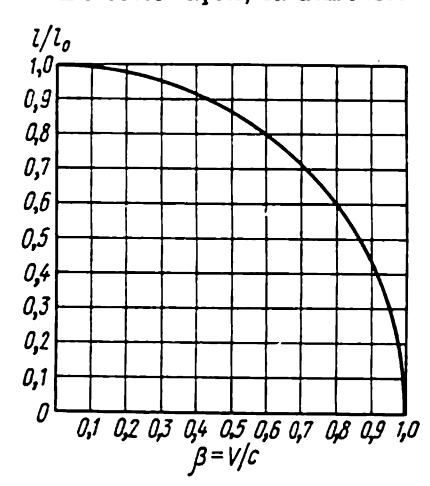


Fig. 113

La formule (6.5) entraîne que la valeur de la contraction dépend de la vitesse V. Cette relation est importante surtout pour des vitesses V comparables à celle de la lumière (fig. 113).

Examinons à ce propos quelques exemples.

Exemple 1. Une tige de longueur propre $l_0 = 5{,}0$ m se déplace dans le sens longitudinal à la vitesse V par rapport au système de référence K. Pour quelle valeur de V sa longueur dans K sera $l = 3{,}0$ m (cet état de choses est visualisé sur la figure 114, *a*)?

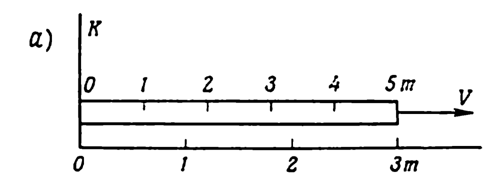
Pour observer cette contraction de la longueur, d'après la formule (6.5) la vitesse de la tige doit être $V = c\sqrt{1-(l/l_0)^2} = 4/5\ c$.

Exemple 2. Une tige A se déplace devant une tige B fixe dans le système de référence K à la vitesse v suivant la figure 114, *b*. Les deux tiges sont de même longueur propre l_0. Trouver dans K l'intervalle de temps Δt entre les instants de coïncidence des extrémités gauches et droites des tiges.

La longueur de la tige A qui se déplace dans le système K s'écrit $l = l_0\sqrt{1-(v/c)^2}$; on comprend donc sans peine à l'aide de la figure 114, *b*, que l'intervalle de temps cherché est

$$\Delta t = \frac{l_0 - l}{v} = \frac{l_0}{v}\left[1 - \sqrt{1-(v/c)^2}\right].$$

Exemple 3. Deux particules se mouvant dans le système de référence K à la même vitesse $v = {}^4/_5\, c$ ont frappé une cible fixe avec des intervalles de temps $\Delta t = 5 \cdot 10^{-9}$ s dans le système de référence donné. Quelle était la distance propre entre les particules avant l'impact?



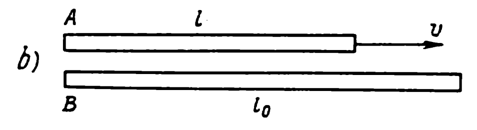


Fig. 114

La distance entre les particules dans le système K, $l = v\Delta t$. Donc, d'après la formule (6.5) la distance cherchée est $l_0 = v\Delta t / \sqrt{1 - (v/c)^2} = 2$m.

Ainsi dans des systèmes galiléens différents la longueur d'une même tige s'avère différente. Autrement dit, *la longueur est une notion relative*: l'affirmation que la longueur d'un corps est de tant de mètres n'a aucun sens tant que le système de référence auquel se rapporte cette grandeur n'est pas indiqué.

Pour ce qui est de faibles vitesses ($V \ll c$), la formule (6.5) et la figure 113 montrent que $l \approx l_0$ et la longueur d'un corps acquiert pratiquement un sens absolu.

Il convient de noter que la contraction de Lorentz, tout aussi bien que le ralentissement du temps, doivent être réciproques. Cela signifie que si nous comparons deux tiges de même longueur propre qui se déplacent l'une par rapport à l'autre, alors du « point de vue » de chacune de ces tiges l'autre tige sera plus courte, et ceci sous le même rapport. S'il n'en était pas ainsi, il serait possible d'établir expérimentalement la différence entre les systèmes galiléens liés à ces tiges; or, ceci contredit le principe de relativité.

On peut donc affirmer que *la contraction de Lorentz est également un effet purement cinématique*, elle se produit sans aucune contrainte provoquant la déformation du corps.

Soulignons que la contraction de Lorentz des corps dans la direction de leur mouvement, tout aussi bien que le ralentissement du temps, est un fait réel, objectif, qui n'a rien à voir avec l'une quelconque des illusions de l'observateur. Toutes les valeurs des dimensions du corps considéré ou des intervalles de temps obtenues dans de différents systèmes de référence sont légitimes (elles sont toutes « cor-

rectes »). La difficulté que nous avons à comprendre ces affirmations est liée exclusivement à notre habitude fondée sur l'expérience quotidienne de considérer comme absolues les notions de longueur et d'intervalle de temps, ce qui est contraire à la réalité. Ces notions sont aussi bien relatives que celles du mouvement et du repos.

§ 6.4. Transformations de Lorentz

Il nous faut maintenant résoudre le problème fondamental des formules de transformation des coordonnées et du temps (il s'agit des formules qui associent les coordonnées et les instants d'un même événement dans des systèmes galiléens différents).

Les transformations de Galilée n'assument-elles pas cette tâche? Rappelons que ces transformations sont fondées sur les hypothèses que la longueur d'un corps ne dépend pas du mouvement et que la marche du temps est la même dans des systèmes galiléens différents. Or, au paragraphe précédent nous avons établi qu'en réalité il n'en est pas ainsi : le cours du temps et la longueur des corps dépendent du système de référence, ce sont les conclusions qui résultent inévitablement des postulats d'Einstein. Il faut donc réfuter les transformations de Galilée, ou plus exactement, reconnaître qu'elles ne sont qu'un cas particulier de certaines transformations plus générales.

Nous avons donc pour tâche de chercher des formules de transformation qui en premier lieu tiendraient compte du ralentissement du temps et de la contraction de Lorentz (c'est-à-dire seraient finalement des conséquences des postulats d'Einstein) et puis, dans le cas limite de petites vitesses, se ramèneraient aux transformations de Galilée.

Examinons deux systèmes galiléens K et K'. Supposons que K' se déplace par rapport à K à la vitesse **V**. Orientons les axes des coordonnées des deux systèmes suivant la figure 115 de façon que les axes des x et des x' coïncident et soient parallèles au vecteur **V**, alors que les axes des y et des y' soient parallèles entre eux. Plaçons en différents points des deux systèmes des horloges identiques et synchronisons-les, les horloges de chaque système prises à part. Enfin, prenons pour origine du temps des deux systèmes l'instant où O et O' coïncident ($t = t' = 0$).

Supposons maintenant qu'un certain événement A, l'allumage d'une ampoule, par exemple, se produise à l'instant t dans le système K au point de coordonnées x, y. Il nous faut trouver les coordonnées x', y', et l'instant t' de cet événement dans le système K'.

Le problème de la coordonnée y' a été déjà résolu au début du paragraphe précédent, où nous avons montré [cf. formule (6.3)] que $y' = y$. Passons donc directement au calcul de la coordonnée x' de l'événement. x' caractérise la longueur propre du segment

$O'P$ fixe dans le système K' (fig. 115). La longueur de ce même segment dans le système K, où la lecture se fait à l'instant t, est égale à $x - Vt$. La relation entre ces longueurs est donnée par la formule (6.5) d'après laquelle $x - Vt = x'\sqrt{1-\beta^2}$. D'où

$$x' = (x - Vt)/\sqrt{1-\beta^2}. \qquad (6.6)$$

D'autre part, la coordonnée x caractérise la longueur propre du segment OP fixe dans K. Or, la longueur de ce segment dans K', où la mesure se fait à l'instant t', est égale à $x'+Vt'$. En tenant compte encore de (6.5) on obtient $x' + Vt' = x\sqrt{1-\beta^2}$, d'où

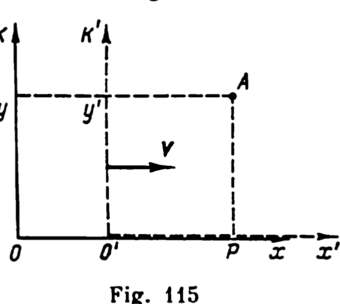


Fig. 115

$$x = (x' + Vt')/\sqrt{1-\beta^2}. \qquad (6.6')$$

Les formules obtenues permettent également d'établir la relation entre les instants t et t' de l'événement A dans les deux systèmes de référence. A cet effet il suffit dans (6.6) et (6.6′) d'éliminer x' ou x, après quoi il vient

$$t' = (t - xV/c^2)/\sqrt{1-\beta^2}; \quad t = (t' + x'V/c^2)/\sqrt{1-\beta^2}. \qquad (6.7)$$

Les formules (6.3), (6.6), (6.6′) et (6.7) s'appellent *transformations de Lorentz*. Elles jouent un rôle fondamental dans la théorie de la relativité. On les emploie pour transformer les coordonnées et le temps d'un événement quelconque lors du passage d'un système galiléen à un autre.

Ainsi, pour passer du système K au système K', les transformations de Lorentz s'écrivent:

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad y' = y; \quad t' = \frac{t - xV/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad (6.8)$$

et inversement, pour passer de K' à K:

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad y = y'; \quad t = \frac{t' + x'V/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad (6.9)$$

où $\beta = V/c$; V, la vitesse du système K' par rapport au système K.

Il convient avant tout d'attirer l'attention sur la symétrie (la même forme) des formules (6.8) et (6.9), qui résulte de la légitimité totale des deux systèmes de référence (le signe différent de V dans ces formules est dû seulement à la direction opposée du mouvement réciproque de K et K').

Les transformations de Lorentz se distinguent fortement des transformations de Galilée (6.1), ces dernières pouvant se déduire pourtant de (6.8) et (6.9), si on y pose formellement $c = \infty$. Qu'est-ce que cela veut dire?

A la fin du paragraphe précédent nous avons noté qu'à la base des transformations de Galilée il y a l'hypothèse de la synchronisation des horloges à l'aide des signaux à propagation instantanée. Cette hypothèse entraîne que dans les transformations de Lorentz la grandeur c joue le rôle des signaux employés pour la synchronisation des horloges. Si cette vitesse est infiniment grande, on obtient les transformations de Galilée; mais si elle est égale à la vitesse de la lumière, on est amené aux transformations de Lorentz. Ainsi, les transformations de Lorentz ont à leur base l'hypothèse sur la synchronisation des horloges à l'aide des signaux lumineux dont la vitesse atteint la valeur limite.

Les transformations de Lorentz ont cette particularité remarquable que pour $V \ll c$ elles deviennent * les transformations de Galilée (6.1). De la sorte, dans le cas limite, $V \ll c$, les lois de transformation de la théorie de la relativité et celles de la mécanique classique coïncident. Il en est ainsi parce que la théorie de la relativité ne considère pas les transformations de Galilée comme incorrectes, mais les envisage vraies comme un cas particulier, valide pour $V \ll c$. Dans ce qui suit nous verrons que ceci traduit la relation générale entre la théorie de la relativité et la mécanique classique: les lois et les formules de la théorie de la relativité deviennent dans le cas limite de petites vitesses celles de la mécanique classique.

Ensuite, les transformations de Lorentz rendent clair que pour $V > c$ les expressions du radicande deviennent négatives et les formules perdent leur sens physique. Ceci correspond au fait que la vitesse des corps supérieure à celle de la lumière dans le vide est impossible. Il est impossible même d'appliquer un système de référence se déplaçant à la vitesse de la lumière $V = c$, puisque dans ces conditions les radicandes s'annulent et les formules perdent aussi leur sens physique. Cela signifie qu'en principe il est impossible d'associer un système de référence à un photon qui se déplace à la vitesse c. Autrement dit, il n'existe pas de système de référence dans lequel un photon pourrait être fixe.

Enfin, il convient d'attirer l'attention sur le fait que les formules de transformation du temps contiennent une coordonnée spatiale. Cette circonstance importante témoigne de l'existence d'une liaison indestructible entre l'espace et le temps. En d'autres termes, il

* En toute rigueur, il faut encore que $x/c \ll t$, c'est-à-dire que les temps de propagation des signaux lumineux à des distances qui figurent dans les problèmes considérés (x/c) soient petits par rapport aux intervalles de temps qui nous intéressent. Sous cette condition on peut pratiquement admettre que la propagation des signaux est instantanée.

ne convient pas d'envisager isolément l'espace et le temps, il faut les considérer comme un *espace — temps* unique, siège de tous les phénomènes physiques.

§ 6.5. Conséquences des transformations de Lorentz

Notion de simultanéité. Supposons que dans le système de référence K se sont produits deux événements quelconques A_1 (x_1, y_1, t_1) et A_2 (x_2, y_2, t_2). Cherchons l'intervalle de temps qui les sépare dans le système K' se déplaçant à la vitesse V le long de l'axe des x, suivant la figure 115. D'après la formule de la transformation du temps (6.8), l'intervalle de temps cherché

$$t'_2 - t'_1 = \frac{(t_2 - t_1) - (x_2 - x_1) V/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad (6.10)$$

Il s'ensuit que les événements simultanés dans le système K $(t_2 = t_1)$ ne le sont pas dans le système K' $(t'_2 - t'_1 \neq 0)$. Il n'y a donc que le cas où les deux événements se produisent dans K simultanément aux points de la même valeur de la coordonnée x (la coordonnée y peut être différente), qui présente une exception.

Ainsi, *la simultanéité est une notion relative*; ce qui est simultané dans un référentiel ne l'est pas dans le cas général dans un autre. En parlant des événements simultanés il faut indiquer le système de référence par rapport auquel cette simultanéité a lieu. Dans le cas contraire cette notion perd son sens et peut donner lieu à toute sorte de malentendus.

Exemple. *Paradoxe de la tige et du tube.* Par un tube AB de longueur l_0, fixe dans le système de référence K passe une tige $A'B'$ de longueur propre $2l_0$. La vitesse de la tige est telle que sa longueur dans le système K est égale à la

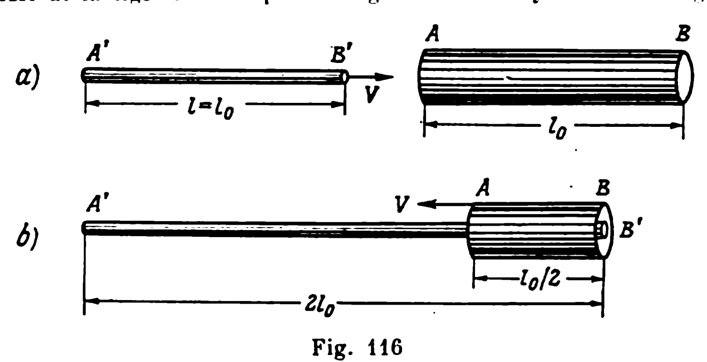


Fig. 116

longueur du tube $l = l_0$ (fig. 116, *a*) et à un certain instant la tige qui passe par le tube y sera contenue complètement. Pourtant, du « point de vue » de la tige le tube subit un dédoublement lorentzien (fig. 116, *b*); il est donc clair que de ce fait la tige $(2l_0)$ ne se rangera pas dans le tube $(l_0/2)$. Est-on ici en présence d'une contradiction?

Il n'y a aucune contradiction ici et voici pourquoi. Du « point de vue » du tube les extrémités de la tige passante coïncideront *simultanément* avec les extrémités du tube. Alors que du « point de vue » de la tige, la coïncidence des extrémités *ne* sera *pas* simultanée; elle aura lieu d'abord pour les extrémités B et B' (fig. 116, *b*), puis, dans un certain intervalle de temps, pour les extrémités A et A'.

La notion de relativité de la simultanéité entraîne que les horloges placées le long de l'axe des x' du système K' et synchronisées entre elles dans ce système, montreront dans le système K un temps

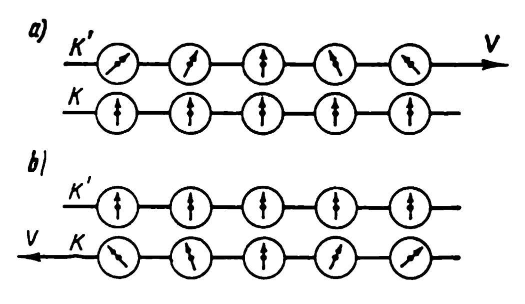


Fig. 117

différent. En effet, prenons pour simplifier l'instant où les origines O et O' des deux systèmes coïncident et les horloges en ces points montrent le même temps: $t = t' = 0$. Alors, dans le système K, en x l'horloge de K montrera à cet instant le temps $t = 0$, et l'horloge de K', en ce point montrera un autre temps t'. En effet, d'après la formule de transformation du temps (6.8)

$$t' = -xV/c^2\sqrt{1-\beta^2}.$$

Il est donc clair qu'à l'instant $t = 0$ (dans K) l'horloge K' montrera un temps différent, dépendant de la coordonnée x (ce qu'on appelle le *temps local*). Cette situation est visualisée sur la figure 117, *a*. Par rapport au système K', les faits seront renversés (fig. 117, *b*), comme il se doit, puisque les deux systèmes galiléens sont légitimes.

Ensuite, la formule (6.10) montre que pour les événements simultanés dans le référentiel K, le signe de la différence $t'_2 - t'_1$ est déterminé par le signe de l'expression $-(x_2 - x_1)V$. Par conséquent, dans des systèmes de référence différents (pour des valeurs différentes de la vitesse V) la différence $t'_2 - t'_1$ différera non seulement en module, mais aussi en signe. Ceci signifie que l'ordre des événements A_1 et A_2 peut être quelconque (aussi bien direct que renversé).

Ce qui vient d'être dit ne se rapporte pas pourtant aux événements liés par la causalité. Leur ordre de succession (cause→ effet) sera le même dans tous les systèmes de référence. Il est facile de s'en

convaincre d'après le raisonnement suivant. Examinons, par exemple, un coup tiré, événement A_1 (x_1, t_1), et un coup au but, la balle frappant la cible, événement A_2 (x_2, t_2), en supposant que les deux événements se produisent sur l'axe des x. Dans le système de référence K, $t_2 > t_1$, la vitesse de la balle est v et supposons pour fixer les idées que $x_2 > x_1$; de plus, il est clair que $x_2 - x_1 = v(t_2 - t_1)$. En portant cette égalité dans la formule (6.10), on obtient

$$t_2' - t_1' = (t_2 - t_1)(1 - vV/c^2)/\sqrt{1-\beta^2}.$$

La grandeur de la deuxième parenthèse du numérateur est toujours positive du fait que $V < c$ (même pour $v = c$, lorsque la relation cause — effet est conditionnée par la vitesse maximale de la transmission des signaux ou des interactions). Il s'ensuit que si $t_2 > t_1$, on a aussi $t_2' > t_1'$, c'est-à-dire la succession des événements cause — effet est la même dans tous les systèmes de référence galiléens.

Contraction de Lorentz. Plaçons une tige fixe dans le système de référence K' le long de l'axe des x', c'est-à-dire le long de la direction du mouvement de ce système par rapport au système K. Supposons que dans K' la longueur de la tige est $l_0 = x_2' - x_1'$ (longueur propre).

Dans le système K, par rapport auquel la tige se déplace, sa longueur est *déterminée* comme la distance l entre les coordonnées x_2 et x_1 de ses extrémités, enregistrées *au même instant* ($t_2 = t_1$). En appliquant les transformations de Lorentz (6.8) aux coordonnées x' et x, écrivons

$$l_0 = x_2' - x_1' = (x_2 - x_1)/\sqrt{1-\beta^2} = l/\sqrt{1-\beta^2},$$

d'où

$$l = l_0\sqrt{1 - \beta^2}. \qquad (6.11)$$

De cette façon la longueur l de la tige en mouvement s'avère plus petite que sa longueur propre l_0, et dans des systèmes galiléens différents elle aura sa valeur à elle. Ce résultat s'accorde parfaitement avec celui obtenu précédemment (6.5).

La définition de la longueur entraîne que la relativité de la longueur de la tige donnée est une conséquence de la relativité de la notion de simultanéité. Ceci se rapporte également à la forme d'un corps quelconque : dans des systèmes de référence différents ses dimensions dans la direction du mouvement sont différentes.

Durée des processus. Supposons qu'un point de coordonnée x' du système de référence K' est le siège d'un processus dont la durée dans ce système est $\Delta t_0 = t_2' - t_1'$ (temps propre du processus). Cherchons la durée du processus donné $\Delta t = t_2 - t_1$ dans le système K par rapport auquel K' est en mouvement.

Utilisons à cet effet les transformations de Lorentz pour le temps. Le processus ayant lieu en x', coordonnée fixée du système K', le

plus commode est d'appliquer les formules (6.9)

$$t_2 - t_1 = (t'_2 - t'_1)/\sqrt{1-\beta^2},$$

ou

$$\Delta t = \Delta t_0/\sqrt{1 - \beta^2}. \tag{6.12}$$

Ceci rend clair que dans des systèmes galiléens différents la durée d'un même processus est différente. Dans le référentiel K sa durée est plus grande ($\Delta t > \Delta t_0$), et par conséquent, dans ce système la marche des processus est plus lente que dans K'. Ce résultat s'accorde parfaitement avec celui se rapportant à la marche d'une même horloge dans des systèmes galiléens différents, c'est-à-dire avec la formule (6.4).

Intervalle. Le caractère relatif des intervalles spatiaux et temporels ne signifie nullement que la théorie de la relativité n'admet pas en général l'existence des grandeurs absolues quelles qu'elles soient. Bien au contraire même. La tâche que se pose la théorie de la relativité consiste à trouver des grandeurs (et des lois) qui ne dépendraient pas du choix du référentiel galiléen.

La première de ces grandeurs est la vitesse universelle de propagation des interactions, égale à la vitesse de la lumière dans le vide. Une autre grandeur invariante très importante également est ce qu'on appelle *intervalle* s_{12} entre les événements *1* et *2*, dont le carré s'écrit

$$\boxed{s_{12}^2 = c^2t_{12}^2 - l_{12}^2 = \text{inv},} \tag{6.13}$$

où t_{12} est l'intervalle de temps entre les événements; l_{12}, la distance entre les deux points où se produisent les événements ($l_{12}^2 = x_{12}^2 + y_{12}^2 + z_{12}^2$).

On se convainc aisément dans l'invariance de l'intervalle en le calculant directement dans les référentiels K et K'. En utilisant les transformations de Lorentz (6.8) et en vertu du fait que $y'_{12} = y_{12}$ et $z'_{12} = z_{12}$ on peut écrire

$$c^2t'^2_{12} - x'^2_{12} = c^2\frac{(t_{12} - x_{12}V/c^2)^2}{1-\beta^2} - \frac{(x_{12} - Vt_{12})^2}{1-\beta^2} = c^2t_{12}^2 - x_{12}^2.$$

De cette façon l'intervalle est en effet une grandeur invariante. Autrement dit, l'affirmation « deux événements sont séparés par un intervalle s » a un caractère absolu, elle est vraie dans tous les systèmes galiléens. L'invariance de l'intervalle joue un rôle fondamental dans la théorie de la relativité, c'est un outil très efficace de l'analyse et de la résolution de nombreux problèmes (cf., par exemple, le problème (6.4)).

Types des intervalles. Suivant la composante spatiale ou temporelle dominante on leur donne les noms suivants:

intervalle genre espace ($l_{12} > ct_{12}$);
intervalle genre temps ($ct_{12} > l_{12}$).

En plus de ces deux types d'intervalles il existe un troisième, intervalle genre lumière ($ct_{12} = l_{12}$).

Si deux événements sont séparés par un intervalle genre espace, on peut toujours trouver un système de référence K' tel que la marche des deux événements soit simultanée ($t'_{12} = 0$):

$$c^2t_{12}^2 - l_{12}^2 = -l'^2_{12}.$$

Mais si l'intervalle est genre temps, on peut toujours trouver un système de référence K' tel que les deux événements se produisent au même point ($l'_{12} = 0$)

$$c^2t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2t'^2_{12}.$$

Dans le cas des intervalles genre espace, $l_{12} > ct_{12}$, c'est-à-dire en aucun système de référence les événements ne peuvent exercer une influence l'un sur l'autre, même si la liaison entre eux était assurée à la vitesse limite c. Il en est autrement dans le cas de l'intervalle genre temps ou genre lumière pour lesquels $l_{12} \leqslant ct_{12}$. Les événements qu'ils séparent peuvent donc être liés entre eux par la causalité.

Transformation de la vitesse. Supposons que dans le plan x, y du système K une particule se meut à la vitesse $\mathbf{v}$ dont les projections sont v_x et v_y. Cherchons à l'aide des transformations de Lorentz (6.8) les projections de la vitesse de cette particule v'_x et v'_y dans le système K' qui se déplace à la vitesse $\mathbf{V}$ suivant la figure 115. A cet effet effectuons le calcul suivant:

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'/dt}{dt'/dt}; \quad v'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy'/dt}{dt'/dt}.$$

En dérivant l'expression (6.8) pour x', y', t' par rapport au temps t on obtient en portant dans les expressions précédentes les relations cherchées ou les *formules de transformation des projections de la vitesse*

$$\boxed{v'_x = \frac{v_x - V}{1 - v_xV/c^2};} \qquad \boxed{v'_y = \frac{v_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 - v_xV/c^2},} \qquad (6.14)$$

où $\beta = V/c$. On en tire la vitesse de la particule dans le système K'

$$v' = \sqrt{v'^2_x + v'^2_y} = \frac{\sqrt{(v_x - V)^2 + v_y^2(1-\beta^2)}}{1 - v_xV/c^2}. \qquad (6.15)$$

Ces formules expriment ce qu'on appelle la *loi relativiste de transformation de la vitesse.* On voit aisément qu'à de faibles vitesses ($V \ll c$ et $v \ll c$) elles sont ramenées aux formules de transformation de la vitesse de la mécanique classique

$$v'_x = v_x - V; \quad v'_y = v_y,$$

ou sous une forme vectorielle

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{V}.$$

Attirons l'attention sur le fait que la dernière formule n'est vraie qu'en approximation newtonienne; dans la région relativiste elle n'a aucun sens, il n'existe pas dans cette région de loi simple de composition des vitesses. On le voit sans peine ne serait-ce que sur l'exemple suivant. Supposons que le vecteur vitesse **v** d'une particule dans le système K est perpendiculaire à l'axe des x, c'est-à-dire que ses projections sont $v_x = 0$ et $v_y = v$. Alors d'après (6.14) les projections de la vitesse de cette particule dans le système K'

$$v'_x = -V; \quad v'_y = v_y \sqrt{1-\beta^2}. \tag{6.16}$$

Ceci traduit le fait que dans notre cas (**v** $\perp$ à l'axe des x), lors du passage au système K', la projection v'_y de la vitesse diminue et il est clair que $\mathbf{v}' \neq \mathbf{v} - \mathbf{V}$ (fig. 118).

Examinons encore un exemple de l'application des formules de transformation de la vitesse (6.14) lors du mouvement de deux particules (cf. également le problème 6.7).

Exemple. Soient deux particules relativistes se déplaçant dans le système de référence K l'une à la rencontre de l'autre à la même vitesse v. Calculer

a) la vitesse du rapprochement des particules dans ce système de référence;

b) leur vitesse relative.

a) La vitesse du rapprochement est la vitesse à laquelle change (diminue) la distance entre les particules dans le système de référence donné. Dans notre

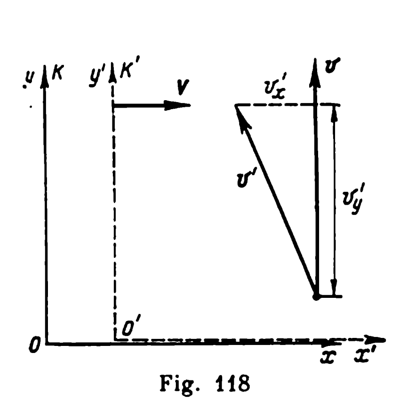


Fig. 118

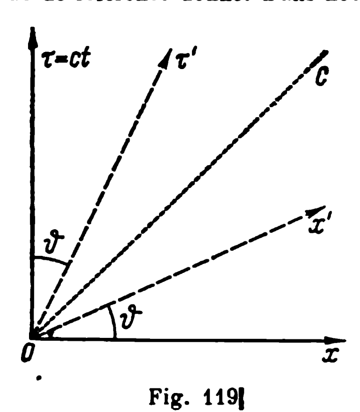


Fig. 119

cas elle est simplement égale à $2v$, cette vitesse pouvant être aussi plus grande que celle de la lumière, ce qui ne contredit en rien la théorie.

b) Par vitesse relative on entend la vitesse à laquelle l'une des particules se déplace dans le système de référence lié à l'autre particule animée d'une translation par rapport au système K initial. Pour trouver cette vitesse, choisissons l'axe des x dans le sens du mouvement des particules. Lions à l'une des particules, par exemple, à la particule *1* qui se déplace dans le sens positif de l'axe des x, le système de référence K' (fig. 119). Le problème se ramène alors au calcul de la vitesse de la particule *2* dans ce référentiel. En portant dans la formule de transformation (6.14) au lieu de la projection v_x de la vitesse, $v_x =$

$= -v$; $V = v$, on obtient

$$v'_x = -\frac{2v}{1+(v/c)^2}.$$

Le signe moins signifie que dans le cas donné la particule *2* se déplace dans le sens négatif de l'axe des x' du système K'.

Il convient de noter que même si les deux particules se déplaçaient à la vitesse maximale $v \approx c$, v' ne pouvait dépasser c, ce qui est immédiat de la dernière formule.

Enfin, vérifions directement que les formules relativistes de transformation des vitesses correspondent à l'affirmation du deuxième postulat d'Einstein sur l'invariabilité de la vitesse de la lumière c dans tous les systèmes de référence galiléens. Soient dans le système K les projections c_x et c_y du vecteur **c**, c'est-à-dire $c^2 = c_x^2 + c_y^2$. Appliquons la formule (6.15) en y transformant le radicande de la façon suivante:

$$c_x^2 - 2c_xV + V^2 + (c^2 - c_x^2)\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) = \left(c - \frac{c_xV}{c}\right)^2.$$

Maintenant il n'est pas difficile d'obtenir $v' = c$. Evidemment, dans le système K' le vecteur **c'** aura alors dans le cas général une autre direction.

Problèmes du chapitre 6

● 6.1. Une tige fixe de $l = 1{,}00$ m de longueur orientée sous un angle $\vartheta = 45°$ à l'axe des x (fig. 120) est placée dans le système de référence K. Trouver sa longueur l' et l'angle correspondant ϑ' dans le système K' se déplaçant par rapport à K à la vitesse $V = c/2$ le long de l'axe des x.

Solution. La longueur de la tige dans le système K'

$$l' = \sqrt{(\Delta x')^2 + (\Delta y')^2} = \sqrt{(\Delta x)^2 (1 - \beta^2) + (\Delta y)^2}.$$

Prenant en considération que $\Delta x = l \cos \vartheta$ et $\Delta y = l \sin \vartheta$, on obtient

$$l' = l\sqrt{1 - \beta^2 \cos^2 \vartheta} = 0{,}94 \text{ m}.$$

L'angle ϑ' dans le système K' s'obtient à l'aide de la tangente

$$\operatorname{tg} \vartheta' = \frac{\Delta y'}{\Delta x'} = \frac{\Delta y}{\Delta x \sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\operatorname{tg} \vartheta}{\sqrt{1-\beta^2}}; \qquad \vartheta' = 49°.$$

Il convient d'attirer l'attention sur le fait que les résultats obtenus ne dépendent pas de la direction de la vitesse du système K'.

● 6.2. Une tige se déplace le long d'une règle à une vitesse constante. Si on fixe simultanément la position des deux extrémités de la tige dans un référentiel lié à la règle, la longueur de la tige $l_1 = 4{,}0$ m. Mais si la position des deux extrémités est fixée simultanément dans un référentiel lié à la tige, la différence de lecture sur la règle sera $l_2 = 9{,}0$ m. Calculer

a) la longueur propre de la tige;

b) la vitesse de la tige par rapport à la règle.

Solution. La longueur propre de la tige l_0 est liée à l_1 et l_2 par les formules suivantes:

$$l_1 = l_0 \sqrt{1 - \beta^2}; \quad l_0 = l_2 \sqrt{1 - \beta^2},$$

où β est la vitesse de la tige (en unités de la vitesse de la lumière). Ces formules amènent

1) $l_0 = \sqrt{l_1 l_2} = 6\text{m}$; 2) $\beta = \sqrt{1 - l_1/l_2} = 5/3 \approx 0{,}75$, ou $v = 0{,}75\ c$.

● 6.3. Deux particules instables se déplacent dans le système de référence K suivant une droite dans le même sens à la vitesse $v = 0{,}990\ c$. La distance entre les particules dans ce référentiel $l = 12$ m. A un certain moment les particules se sont désintégrées simultanément dans le système de référence K' qui leur est associé. Chercher

a) l'intervalle de temps dans le système K entre les instants de désintégration des deux particules;

b) laquelle des particules dans le système K s'est désintégrée plus tard.

Solution. a) Supposons que la désintégration de la particule qui se déplaçait la première est l'événement *1*, et celle de la particule qui la suivait, l'événement *2*. Alors, d'après les transformations de Lorentz du temps (6.9)

$$t_1 - t_2 = \frac{(x_1' - x_2')/c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}},$$

expression qui rend compte que $t_1' = t_2'$ (par condition). La différence $(x_1' - x_2')$ est la distance propre l_0 entre les particules. D'après (6.5) elle s'écrit $l_0 = l/\sqrt{1 - (v/c)^2}$. Donc

$$t_1 - t_2 = \frac{lv/c^2}{1-(v/c)^2} = 2{,}0\ \mu\text{s}.$$

b) Puisque $t_1 - t_2 > 0$, il vient $t_1 > t_2$; autrement dit, la particule qui précédait s'est désintégrée plus tard.

● 6.4. Trouver la distance parcourue dans le système K par une particule instable depuis l'instant de sa création à l'instant de sa désintégration, si la

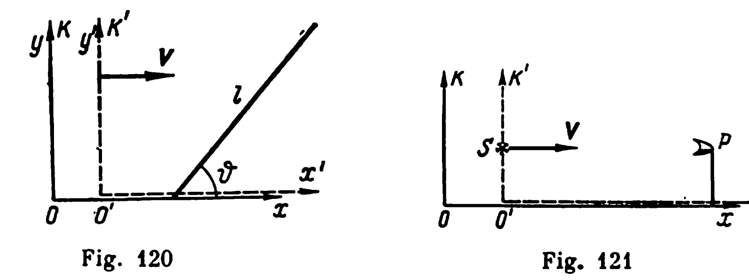


Fig. 120 Fig. 121

durée de sa vie dans ce référentiel est $\Delta t = 3{,}0 \cdot 10^{-6}$ s et sa durée de vie propre $\Delta t_0 = 2{,}2 \cdot 10^{-6}$ s.

Solution. En profitant de la formule (6.12) calculons la vitesse de la particule V, puis la distance cherchée:

$$l = \Delta t \cdot V = \Delta t \cdot c\sqrt{1 - (\Delta t_0/\Delta t)^2} = 0{,}6 \text{ km}.$$

Un autre mode de résolution est fondé sur l'utilisation de l'invariance de l'intervalle

$$c^2 (\Delta t_0)^2 = c^2 (\Delta t)^2 - l^2,$$

où le premier membre est le carré de l'intervalle dans le système de référence lié à la particule elle-même, et le second, le carré de l'intervalle dans le système K. Pour l on en tire le même résultat.

● 6.5. **Effet Doppler**. Un récepteur P des rayons lumineux (fig. 121) est placé dans le système de référence K. Une source S de signaux lumineux s'en

rapproche à la vitesse V. Dans le système de référence lié à la source les signaux sont émis à une fréquence ν_0. Quelle sera la fréquence ν des signaux enregistrés par le récepteur P?

Solution. Dans le système K' lié à la source l'intervalle de temps entre deux signaux successifs (impulsions) est $T_0 = 1/\nu_0$. Ce système se déplaçant à la vitesse V, dans le système K d'après (6.12) l'intervalle de temps correspondant sera plus grand:

$$T = T_0/\sqrt{1-\beta^2}; \quad \beta = V/c.$$

L'intervalle de temps dans le système K entre deux impulsions successives

$$\lambda = cT - VT = (c-V)\,T = (c-V) \times \frac{T_0}{\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad (1)$$

Donc, la fréquence enregistrée par le récepteur

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{c\sqrt{1-\beta^2}}{T_0(c-V)} = \nu_0\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}},$$

ou

$$\nu = \nu_0\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta}.$$

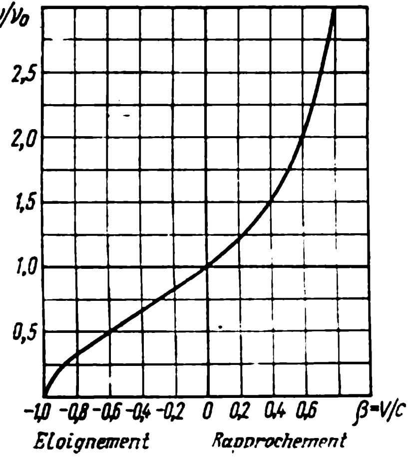


Fig. 122

Si la source s'approche (notre cas), $\nu > \nu_0$; mais si elle s'éloigne, alors $\nu < \nu_0$ (dans ce cas le signe de β change (fig. 122)). La formule obtenue pour la fréquence ν exprime ce qu'on appelle l'*effet Doppler longitudinal.*



Fig. 123

Notons qu'en physique classique, conformément au temps absolu, $T = T_0$. La formule classique de l'effet Doppler ne contient donc pas de racine $\sqrt{1-\beta^2}$ (au lieu de cette racine il y a 1)

$$\nu = \nu_0/(1-\beta) \approx \nu_0(1 + V/c).$$

Profitons de l'occasion pour examiner un cas plus général: dans le système K la vitesse V de la source fait un angle α avec la ligne d'observation (fig. 123). Dans ce cas dans la formule (1) il suffit de remplacer V par $V\cdot\cos\alpha$. Il vient

$$\nu = \nu_0\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta\cos\alpha}.$$

En particulier, pour $\alpha = \pi/2$, on observe ce qu'on appelle l'*effet Doppler transversal*:

$$\nu = \nu_0\sqrt{1-\beta^2},$$

avec lequel la fréquence observée est toujours plus petite que la fréquence « propre » ν_0. A propos, cette dernière expression résulte simplement du ralentissement du temps dans le système de référence en mouvement; on peut l'obtenir

aussi directement de la formule (6.12):

$$\nu=\frac{1}{T}=\frac{1}{T_0/\sqrt{1-\beta^2}}=\nu_0\sqrt{1-\beta^2}.$$

●6.6. **Relations entre les événements.** La figure 124 représente le *diagramme espace-temps*. Chaque point de ce diagramme (*point d'univers*) caractérise

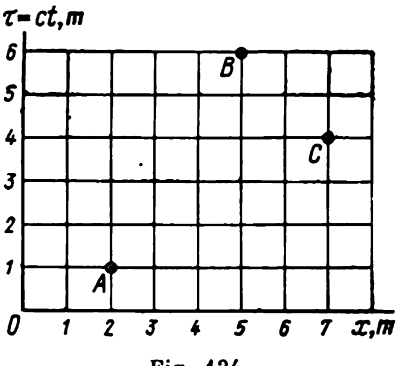


Fig. 124

un certain événement, sa coordonnée et l'instant quand il s'est produit. Examinons trois événements qui correspondent aux points d'univers A, B, C. Vérifier que ces événements donnent lieu aux relations suivantes:

Paire des événements	Type d'intervalle	Propres		Liaison causale
		temps $c\Delta t_0$, mn	distance Δx_0, m	
AB	Genre temps	4	—	$A\to B$
AC	Genre espace	—	4	absence
BC	Genre lumière	0	0	$C\to B$

Indication: utiliser l'invariance de l'intervalle.

●6.7. Deux particules se déplacent dans le système K sous un angle droit l'une à l'autre, la première à la vitesse v_1, et la seconde, à la vitesse v_2. Déterminer la vitesse d'une particule par rapport à l'autre.

Solution. Prenons l'axe des coordonnées du système K suivant la figure 125. Associons à la particule *1* le système de référence K', alors que la vitesse de la particule *2* dans ce système sera justement la vitesse cherchée. A l'aide de la formule (6.15), en posant $V=v_1$ et $v_x=0$, on obtient

$$v_2'=\sqrt{v_{2x}'^2+v_{2y}'^2}=\sqrt{v_1^2+v_2^2-(v_1v_2/c)^2}.$$

Notons que d'après la loi classique de la composition des vitesses

$$v_2'=\sqrt{v_1^2+v_2^2}.$$

●6.8. **Transformation de la direction de la vitesse.** Une particule se déplace dans le système K à la vitesse v sous un angle ϑ à l'axe des x. Trouver l'angle

correspondant ϑ' dans le système K' qui se déplace à la vitesse **V** suivant la figure 126.

Solution. Supposons que dans le système K les projections du vecteur **v** sont v_x et v_y. Alors, pour l'angle ϑ on peut écrire la relation suivante

$$\operatorname{tg}\vartheta = v_y/v_x.$$

Compte tenu des formules (6.14) on obtient dans le système K'

$$\operatorname{tg}\vartheta' = v'_y/v'_x = v_y\sqrt{1-\beta^2}/(v_x - V).$$

En substituant $v_x = v\cos\vartheta$ et $v_y = v\sin\vartheta$, on trouve

$$\operatorname{tg}\vartheta' = \frac{\sin\vartheta\cdot\sqrt{1-\beta^2}}{\cos\vartheta - V/v}.$$

Cette formule rend clair que pour la vitesse la formule de transformation des angles est différente de celle de la transformation des segments (cf. problème 6.1).

●6.9. Une tige parallèle à l'axe des x du système K se déplace dans ce système à la vitesse v dans le sens positif de l'axe des y. Chercher l'angle ϑ'

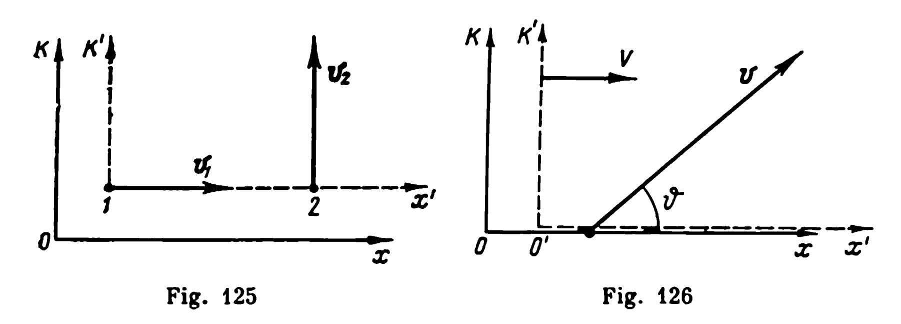


Fig. 125 Fig. 126

entre cette tige et l'axe des x' du système K' qui se déplace à la vitesse V par rapport à K dans le sens positif de son axe des x. Les axes des x et x' coïncident, les axes des y et y' sont parallèles entre eux.

Solution. Supposons qu'à un certain moment les extrémités de la tige coïncident avec l'axe des x dans le système K. Ces deux événements simultanés dans K, ne le sont pas dans K'; d'après (6.10), ils se suivront avec un intervalle de temps

$$\Delta t' = \Delta x V/c^2\sqrt{1-\beta^2},$$

où Δx est la longueur propre de la tige. Pendant ce temps, l'extrémité droite de la tige se trouvera plus « haut » que l'extrémité gauche de $\Delta y' = v'_y\Delta t'$, où $v'_y = v\sqrt{1-\beta^2}$ (cf. formule (6.16)). De la sorte, dans le système K' la tige sera tournée dans le sens opposé aux aiguilles d'une montre d'un angle ϑ' qui peut se calculer d'après la formule

$$\operatorname{tg}\vartheta' = \Delta y'/\Delta x' = \beta v/c\sqrt{1-\beta^2},$$

où $\Delta x' = \Delta x\sqrt{1-\beta^2}$ est la projection de la tige sur l'axe des x' dans le système K'; $\beta = V/c$.

●**6.10. Transformation relativiste de l'accélération.** Une particule se déplace dans le système K à la vitesse **v** et avec une accélération **w**. Trouver l'accélération de cette particule dans le système K' qui se meut à la vitesse **V** dans le sens positif de l'axe des x du système K. Examiner le cas lorsque la particule se déplace le long des axes 1) des x; 2) des y du système K.

Solution. 1. Ecrivons de la façon suivante chaque projection de l'accélération de la particule dans le système K':

$$w'_x = \frac{dv'_x}{dt'} = \frac{dv'_x}{dt}\,\frac{1}{dt'/dt}\,.$$

En utilisant la première des formules (6.14) et la dernière des formules (6.8) on obtient après dérivation:

$$w'_x = \frac{(1-\beta^2)^{3/2}}{(1-\beta v_x/c)^3}\,w_x\,; \qquad w'_y = 0.$$

2. Des calculs analogues conduisent aux résultats suivants:

$$w'_x = 0\,; \quad w'_y = (1-\beta^2)\,w_y.$$

Dans ces formules $\beta = V/c$.

CHAPITRE 7

DYNAMIQUE RELATIVISTE

§ 7.1. Impulsion relativiste

Rappelons d'abord deux principes fondamentaux de la mécanique newtonienne relatifs à l'impulsion :

1) l'impulsion d'une particule est déterminée comme $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, où on admet que la masse m de la particule ne dépend pas de sa vitesse ;

2) dans un référentiel galiléen quelconque, l'impulsion d'un système fermé de particules se conserve dans le temps.

Considérons maintenant la dynamique relativiste. Il s'avère (ce qui est rendu clair par l'exemple bien simple que nous allons examiner) que pour un système fermé de particules relativistes la loi de conservation de l'impulsion newtonienne ne s'observe pas. Nous nous trouvons ainsi devant l'alternative de rejeter la définition newtonienne de l'impulsion ou la loi de conservation de cette grandeur.

Se rendant compte du rôle énorme que jouent les lois de conservation, la théorie de la relativité considère comme loi fondamentale précisément la loi de conservation de l'impulsion et à partir de cette loi elle déduit l'expression de l'impulsion elle-même *.

Montrons d'abord que la prescription de la validité de la loi de conservation de l'impulsion dans un système de référence galiléen quelconque et la prise en considération de la transformation relativiste des vitesses lors du passage d'un système galiléen à un autre, permettent de conclure que la masse d'une particule doit dépendre de sa vitesse (à la différence de la mécanique newtonienne). A cet

* Une question se pose alors, à savoir, quel rôle peut jouer la loi de conservation de l'impulsion, si cette loi est déterminée justement de façon qu'elle se conserve? Pour y répondre imaginons une particule qui dans son mouvement entre en collision avec d'autres particules. Après avoir examiné la première collision, *déterminons* l'impulsion de façon que dans la collision considérée la loi de sa conservation soit observée. Alors, pour les collisions qui suivent, la situation changera : nous connaîtrons déjà les impulsions des particules qui interviennent dans ces collisions, et par suite la loi de conservation de l'impulsion (si cette loi existe réellement) sera observée non pas par définition, mais en vertu des lois de la nature.

L'expérience montre que l'impulsion *ainsi* définie respecte en effet la loi de conservation. Au moins jusque-là on ne connaît aucun phénomène qui pourrait l'invalider.

effet, examinons une collision absolument inélastique de deux particules en supposant que le système est fermé.

Supposons que dans un référentiel galiléen K se déplacent à la même vitesse v_0 mais sous un angle α à l'axe des x (fig. 127, *a*) deux particules *indentiques 1* et *2* l'une à la rencontre de l'autre. Il est évident que dans ce référentiel l'impulsion globale des deux particules

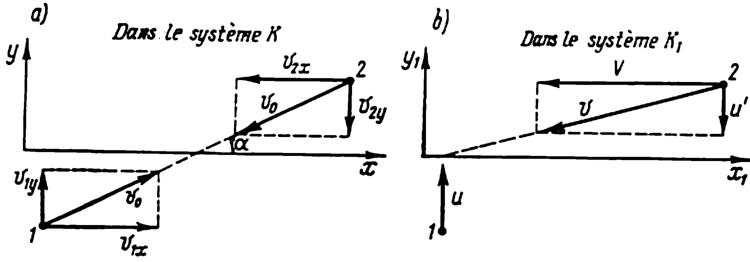


Fig. 127

se conserve: elle est nulle avant et après la collision (d'après des considérations de symétrie, la particule nouvellement formée s'avère fixe).

Considérons maintenant ce qu'il en sera dans un autre référentiel galiléen. A cet effet retenons d'abord deux systèmes de référence, le système K_1 se déplaçant à droite à la vitesse v_{1x}, et le système K_2 se déplaçant à gauche à la vitesse v_{2x} (fig. 127, *a*). Il est clair que la particule *1* dans K_1 et la particule *2* dans K_2 se déplacent seulement le long de l'axe des y, et ceci à des vitesses égales en module que nous noterons u.

Examinons la marche de la collision dans le système K_1 (fig. 127, *b*), où la vitesse de la particule *1* est u. Calculons la composante y de la vitesse de la particule *2* dans ce référentiel en la notant par u'. Comme nous l'avons dit, cette particule se déplace dans le système K_2 à la vitesse u le long de l'axe des y et, d'autre part, se déplace avec le système K_2 à gauche à la vitesse V par rapport au système K_1. Donc, d'après (6.16) la composante y de la vitesse de la particule *2* dans le système K_1 s'écrit

$$u' = u\sqrt{1 - (V/c)^2}. \tag{7.1}$$

Ecrivons maintenant les composantes y des impulsions des deux particules dans K_1: m_1u et m_2u'. D'après (7.1), $u' < u$, il est donc aisé de voir que la loi de conservation de l'impulsion sous sa forme habituelle (newtonienne) ne s'observe pas. En effet, dans notre cas $m_1 = m_2$ (les particules sont identiques) et, par conséquent, la composante y de l'impulsion globale des particules avant la collision est différente de zéro, alors qu'après la collision elle est nulle (la particule nouvellement formée se déplacera le long de l'axe des x).

Imposons, pourtant, à la loi de conservation de l'impulsion qu'elle soit observée également dans le système K_1, c'est-à-dire admettons que $m_1u = m_2u'$. On en tire compte tenu de (7.1)

$$m_2 = m_1/\sqrt{1-(V/c)^2}.$$

Pour $\alpha \to 0$ (fig. 127), $u \to 0$ et m_1 constitue une masse de la particule qui est au repos, notée m_0 et nommée *masse au repos*. Quant à la vitesse V, elle s'avère sous cette condition égale à v qui est la vitesse de la particule *2* par rapport à la particule *1*. La dernière formule peut donc se récrire comme suit:

$$m = m_0/\sqrt{1-(v/c)^2}, \qquad (7.2)$$

où m est la masse de la particule en mouvement (rappelons que les deux particules sont identiques). La masse m est dite *relativiste*. (7.2) montre que cette dernière est plus grande que la masse au repos et dépend de la vitesse de la particule (fig. 128).

De la sorte, nous avons abouti à une conclusion importante: *la masse relativiste d'une particule dépend de sa vitesse*. Autrement dit, la masse d'une même particule sera différente dans des systèmes galiléens différents.

A la différence de la masse relativiste, la masse au repos d'une particule m_0 est une grandeur invariante, c'est-à-dire elle est la même dans tous les systèmes de référence. Pour cette raison on peut affirmer que c'est précisément la masse au repos qui caractérise une particule. Pourtant, dans ce qui suit nous utiliserons souvent la masse relativiste m, pour simplifier plusieurs conclusions, raisonnements et calculs.

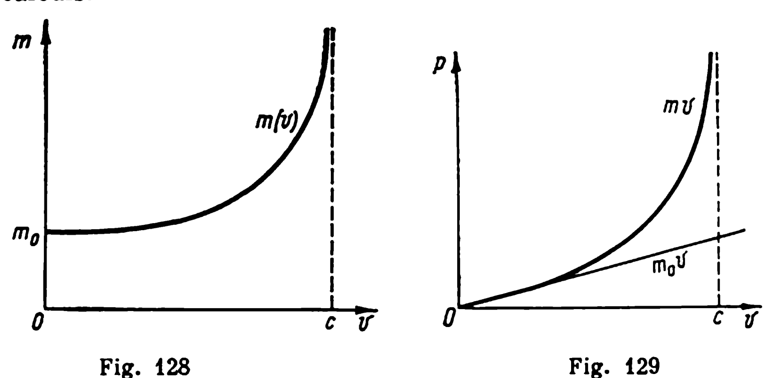


Fig. 128 Fig. 129

Ecrivons maintenant l'expression de l'impulsion d'une particule relativiste. Compte tenu de (7.2) cette impulsion est de la forme

$$\boxed{\mathbf{p} = m\mathbf{v} = \frac{m_0\mathbf{v}}{\sqrt{1-(v/c)^2}}.} \qquad (7.3)$$

C'est justement ce qu'on appelle l'*impulsion relativiste* d'une particule. L'expérience confirme que l'impulsion *ainsi* déterminée observe la loi de conservation indépendamment du choix du système de référence galiléen.

Notons qu'avec $v \ll c$, (7.3) se ramène à la définition newtonienne de l'impulsion: $\mathbf{p} = m_0\mathbf{v}$, où m_0 ne dépend pas de la vitesse v. La figure 129 représente à titre de comparaison les relations entre les impulsions relativiste et newtonienne d'une particule et sa vitesse. Il est clair que la différence entre les deux impulsions devient très importante à mesure que la vitesse de la particule s'approche de celle de la lumière.

Examinons deux exemples sur l'application des formules (7.2) et (7.3).

Exemple 1. Dans les accélérateurs géants modernes les protons sont accélérés jusqu'à des vitesses qui se distinguent de 0,01% de la vitesse de la lumière. Combien de fois la masse relativiste de ces protons est supérieure à leur masse au repos?

D'après (7.2), $m/m_0 = 1/\sqrt{1-\beta^2}$, où $\beta = v/c$. Puisque β se distingue peu de l'unité, dans le cas considéré le radicande peut être mis sous la forme

$$1-\beta^2 = (1+\beta)(1-\beta) \approx 2(1-\beta).$$

Alors,

$$m/m_0 \approx 1/\sqrt{2(1-\beta)} \approx 70.$$

Exemple 2. Pour quelles valeurs de la vitesse d'une particule son impulsion newtonienne se distingue de son impulsion relativiste de 1 %? de 10 %?

La condition $\eta = (p - p_{cl})/p = 1 - \sqrt{1-(v/c)^2}$ entraîne

$$v/c = \sqrt{\eta(2-\eta)}.$$

D'où

$$\frac{v}{c} = \begin{cases} 0{,}14 \text{ avec } \eta = 0{,}01; \\ 0{,}45 \text{ avec } \eta = 0{,}10. \end{cases}$$

De cette façon, l'utilisation de la formule classique de l'impulsion assure une précision non inférieure à 1 % pour $v/c \leqslant 0{,}14$, et non inférieure à 10 % pour $v/c \leqslant 0{,}45$.

§ 7.2. Equation fondamentale de la dynamique relativiste

D'après le principe de relativité d'Einstein, toutes les lois de la nature doivent être invariantes par rapport aux systèmes de référence galiléens. Autrement dit, les formulations mathématiques des lois doivent avoir la même forme dans tous ces référentiels. Cela concerne, en particulier, les lois de la dynamique.

Pourtant, un examen plus détaillé montre que déjà l'équation fondamentale de la dynamique de Newton: $m\mathbf{w} = \mathbf{F}$, ne vérifie pas le principe de relativité d'Einstein. Les transformations de Lorentz pour le passage à un autre référentiel galiléen lui donnent une toute autre forme.

Pour satisfaire aux principes de la Relativité, l'équation fondamentale de la dynamique doit donc avoir une autre forme et ce n'est qu'avec $v \ll c$ qu'elle doit se transformer en équation newtonienne. En théorie de la relativité on démontre qu'à ces exigences satisfait l'équation

$$d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}, \tag{7.4}$$

où **F** est la force appliquée à la particule. Cette équation coïncide complètement *quant à la forme* avec l'équation fondamentale de la dynamique newtonienne (4.1). Pourtant, son sens physique est tout à fait différent : le premier membre est ici la dérivée par rapport au temps de l'impulsion *relativiste*, déterminée par la formule (7.3). En portant (7.3) dans (7.4) écrivons cette dernière équation sous la forme :

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\mathbf{v}}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\right) = \mathbf{F},} \tag{7.5}$$

qui est précisément l'*équation fondamentale de la dynamique relativiste*.

On voit sans peine que c'est justement sous cette forme que l'équation de la dynamique conduit à la conservation de l'impulsion d'une particule libre, et pour de faibles vitesses ($v \ll c$) prend la forme de l'équation fondamentale de la dynamique newtonienne ($m\mathbf{w} = \mathbf{F}$).

D'autre part, c'est précisément sous cette forme que l'équation fondamentale de la dynamique s'avère invariante par rapport aux transformations de Lorentz et, par suite, vérifie le principe de relativité d'Einstein. Sans nous attarder à la démonstration de ce fait, notons seulement que lors du passage d'un référentiel galiléen à un autre, il convient d'admettre que la force **F** se transforme d'après des lois définies. Autrement dit, en Relativité la force **F** est une grandeur non invariante, dans des systèmes de référence différents sa valeur numérique et sa direction sont différentes *.

L'équation fondamentale de la dynamique relativiste amène une conclusion inattendue : dans le cas général, le vecteur accélération **w** d'une particule ne coïncide pas en direction avec le vecteur force **F**. Pour le montrer, mettons (7.5) sous la forme

$$d\,(m\mathbf{v})/dt = \mathbf{F},$$

* Contrairement à la mécanique newtonienne, où les forces sont absolues, dans la théorie de la relativité les projections de la force perpendiculaires à la direction du vecteur vitesse relative des systèmes de référence diffèrent dans des systèmes différents. Ces projections ont une valeur maximale dans celui des systèmes de référence où à l'instant donné la particule est au repos :

$$F'_x = F_x; \qquad F'_y = F_y\sqrt{1-(v/c)^2}.$$

où m est la masse relativiste de la particule. Après la dérivation par rapport au temps, on obtient

$$(dm/dt)\,\mathbf{v} + m\,(d\mathbf{v}/dt) = \mathbf{F}. \tag{7.6}$$

Cette expression est visualisée sur la figure 130. De la sorte, dans le cas général, le vecteur accélération **w** en effet n'est pas colinéaire au vecteur force **F**.

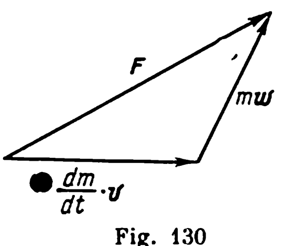


Fig. 130

Le vecteur accélération **w** ne coïncide en direction avec le vecteur **F** que dans deux cas:

1) $\mathbf{F} \perp \mathbf{v}$ (*force transversale*); le vecteur vitesse **v** ne change pas alors en module, c'est-à-dire $v =$ const, et l'équation (7.5) devient

$$m_0\mathbf{w}/\sqrt{1-(v/c)^2} = \mathbf{F},$$

d'où l'accélération

$$\mathbf{w} = (\mathbf{F}/m_0)\sqrt{1-(v/c)^2};$$

2) $\mathbf{F} \parallel \mathbf{v}$ (*force longitudinale*). Dans ce cas l'équation (7.5) peut s'écrire sous une forme scalaire; en dérivant son premier membre par rapport au temps, on obtient

$$\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}} + \frac{m_0v^2/c^2}{[1-(v/c)^2]^{3/2}}\right)\frac{dv}{dt} = F,$$

d'où l'accélération (sous une forme vectorielle) s'écrit

$$\mathbf{w} = (\mathbf{F}/m_0)\,[1-(v/c)^2]^{3/2}.$$

On remarque sans peine que pour les valeurs de la force F et de la vitesse v, identiques dans les deux cas, la force transversale communique à la particule une accélération plus grande que la force longitudinale.

L'équation fondamentale de la dynamique relativiste permet d'une part, de déduire la formule de la force **F** appliquée à la particule, si on connaît la relation entre le temps et l'impulsion relativiste $\mathbf{p}(t)$, et d'autre part, d'établir l'équation du mouvement de la particule $\mathbf{r}(t)$, si on connaît la force appliquée et les conditions initiales (vitesse $\mathbf{v}_0$ et position $\mathbf{r}_0$ de la particule à l'instant initial).

Les problèmes 7.1 à 7.3 peuvent servir d'exemples d'application de l'équation (7.5).

§ 7.3. Loi d'interaction de la masse et de l'énergie

Energie cinétique d'une particule relativiste. Déterminons cette grandeur de la même façon que le fait la mécanique classique, c'est-à-dire comme une grandeur dont l'accroissement est égal au travail de la force appliquée à la particule. Trouvons d'abord l'accroissement de l'énergie cinétique dT d'une particule sous l'action de la force **F** lors du parcours d'une voie élémentaire $d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt$:

$$dT = \mathbf{F}\mathbf{v}dt.$$

D'après l'équation fondamentale de la dynamique relativiste (7.4), $\mathbf{F}dt = d(m\mathbf{v}) = dm\cdot\mathbf{v} + md\mathbf{v}$, où m est la masse relativiste. Donc,

$$dT = \mathbf{v}\,(dm\cdot\mathbf{v} + md\mathbf{v}) = v^2dm + mvdv,$$

où on a tenu compte que $\mathbf{v}d\mathbf{v} = vdv$ (cf. p. 76). Cette expression peut être simplifiée en utilisant la formule (7.2) de la dépendance de la masse par rapport à la vitesse. Portons cette formule au carré et ramenons-la à la forme

$$m^2c^2 = m^2v^2 + m_0^2c^2.$$

Calculons la dérivée de cette expression en tenant compte que m_0 et c sont des constantes:

$$2mc^2dm = 2mv^2dm + 2m^2vdv.$$

Si maintenant cette égalité est divisée par $2m$, son second membre coïncidera avec l'expression de dT. Il s'ensuit que

$$dT = c^2dm. \tag{7.7}$$

De cette façon, l'accroissement de l'énergie cinétique d'une particule est proportionnel à l'accroissement de sa masse relativiste. L'énergie cinétique d'une particule au repos est nulle et sa masse est égale à la masse au repos m_0. En intégrant (7.7) on obtient donc

$$T = (m - m_0)\,c^2, \tag{7.8}$$

ou

$$\boxed{T = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right),} \tag{7.9}$$

où $\beta = v/c$. Ceci est justement l'expression de l'*énergie cinétique relativiste* d'une particule. Il est clair qu'elle se distingue sensiblement de l'expression classique $m_0v^2/2$. Pourtant, nous pouvons nous convaincre qu'à de faibles vitesses ($\beta \ll 1$) l'expression (7.9) prend sa forme classique. A cet effet utilisons la formule du binôme de Newton d'après laquelle

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = (1-\beta^2)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \frac{3}{8}\beta^4 + \ldots$$

Avec $\beta \ll 1$, on peut se limiter aux premiers deux termes de cette série, et alors

$$T = m_0c^2\beta^2/2 = m_0v^2/2.$$

De la sorte, à de grandes vitesses l'énergie cinétique d'une particule est déterminée par la formule relativiste (7.9) différente de $m_0v^2/2$. Notons que (7.9) ne peut pas non plus être mise sous la forme $mv^2/2$, où m est la masse relativiste.

La figure 131 représente à titre de comparaison les diagrammes des relations entre β et les énergies cinétiques relativiste T_{rel} et classique T_{cl}. Leur différence se manifeste surtout dans le domaine des vitesses comparables à celle de la lumière.

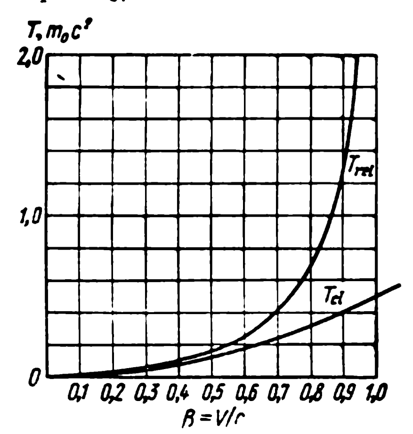


Fig. 131

Exemple 1. Une particule de masse au repos m_0 se déplace à la vitesse à laquelle son énergie cinétique relativiste T est n fois supérieure à l'énergie cinétique calculée d'après la formule classique. Trouver T.

Introduisons pour simplifier l'écriture la notation $\tau = T/m_0c^2$. Alors la condition donnée $T = n \cdot m_0v^2/2$ peut s'écrire

$$\tau = n\beta^2/2,$$

où $\beta = v/c$. Compte tenu du fait que β est lié à T par la formule (7.9), on en tire

$$\beta^2 = 1 - 1/(1+\tau)^2.$$

Après avoir éliminé de ces deux équations β^2, on obtient

$$2\tau^2 + (4-n)\tau - 2(n-1) = 0.$$

La racine de cette équation s'écrit

$$\tau = [n - 4 + \sqrt{n(n+8)}]/4.$$

Le signe moins devant la racine n'a pas de sens physique (τ ne peut pas être négatif) et de ce fait on l'omet.

Voici quatre valeurs de τ calculées d'après la dernière formule pour les n suivants:

$n = T/T_{cl}$:	1,01	1,1	1,5	2,0
$\tau = T/m_0c^2$:	0,0067	0,065	0,32	0,62

Ceci rend clair que, par exemple, avec $T/m_0c^2 \leqslant 0{,}0067$, l'utilisation de la formule classique de l'énergie cinétique assure une précision non inférieure à 1 %.

Exemple 2. Quel travail faut-il fournir pour augmenter de 0,6 à 0,8 c la vitesse d'une particule de masse au repos m_0? Comparer le résultat à la valeur calculée d'après la formule classique.

D'après la formule (7.9) le travail cherché

$$A = T_2 - T_1 = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta_2^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-\beta_1^2}}\right) = 0{,}42m_0c^2.$$

D'après la formule classique le travail correspondant

$$A = m_0(v_2^2 - v_1^2)/2 = 0{,}14m_0c^2.$$

Il est évident que les deux résultats sont sensiblement différents.

Loi d'interaction de la masse et de l'énergie. La formule (7.7) entraîne que l'accroissement de l'énergie cinétique d'une particule s'accompagne de l'accroissement proportionnel de sa masse relativiste. On sait, par ailleurs, que dans la nature la marche de différents processus conditionne la transformation de certaines formes d'éner-

gie en d'autres formes. Par exemple, l'énergie cinétique des particules en collision peut se transformer en énergie interne de la particule nouvellement créée. Il est donc logique de s'attendre que la masse d'un corps augmentera non seulement avec l'énergie cinétique qui lui est communiquée, mais en général, avec une augmentation *quelconque* de la réserve de son énergie générale, indépendamment de la forme concrète de l'énergie qui a conduit à cette augmentation.

Einstein en a tiré la conclusion fondamentale suivante: l'énergie totale d'un corps (ou d'un système de corps) quelles que soient les formes de l'énergie qui la constituent (cinétique, électrique, chimique, etc.) est liée à la masse du corps par la relation

$$\boxed{E = mc^2.} \tag{7.10}$$

Cette formule exprime l'une des lois les plus importantes de la nature, celle de l'interaction (proportionnalité) de la masse m et de *l'énergie totale* E d'un corps. Pour éviter des malentendus, attirons l'attention sur le fait que si un corps subit l'action d'un champ extérieur, son énergie totale E ne contient pas l'énergie potentielle du corps dans un tel champ.

Si l'on tient compte de la formule (7.8) la relation (7.10) peut s'écrire également sous une autre forme. L'énergie totale d'un corps se met alors sous la forme

$$E = m_0c^2 + T,$$

où m_0 est la masse au repos du corps; T, son énergie cinétique. Il s'ensuit directement que le corps au repos ($T = 0$) possède également une énergie:

$$E_0 = m_0c^2. \tag{7.11}$$

Cette énergie s'appelle *énergie au repos* ou *énergie propre*.

Nous voyons que la masse d'un corps qui dans la mécanique non relativiste se manifestait comme la mesure d'inertie (dans la deuxième loi de Newton) ou la mesure d'action gravitationnelle (dans la loi de l'attraction universelle), assure maintenant une nouvelle fonction, celle de la mesure de *teneur en énergie* du corps. D'après la théorie de la relativité, même un corps au repos possède une réserve d'énergie, celle de l'énergie au repos.

Le changement de l'énergie totale d'un corps (d'un système) s'accompagne du changement équivalent de sa masse $\Delta m = \Delta E/c^2$ et inversement. Dans les processus macroscopiques ordinaires la masse change d'une valeur petite à l'extrême, inaccessible aux mesures. Ceci peut être illustré par les exemples suivants.

Exemples. A. Pour placer un satellite de masse $m = 100$ kg sur une orbite circumterrestre, on lui a communiqué la vitesse de 8 km/s. Cela signifie que son énergie a augmenté de $\Delta E = mv^2/2$ (on tient compte ici que $v \ll c$). L'aug-

mentation correspondante de la masse du satellite

$$\Delta m = \Delta E/c^2 = mv^2/2c^2 = 3{,}5\cdot10^{-8}\ \text{kg}.$$

B. En chauffant un litre d'eau de 0 à 100 °C on lui communique une énergie $\Delta E = mc_p\Delta t$, où $c_p = 4{,}2$ J/(g·Cal) est la capacité thermique de l'eau; Δt, la différence de température. L'augmentation correspondante de la masse de l'eau est:

$$\Delta m = \Delta E/c^2 = 0{,}47\cdot10^{-10}\ \text{kg}.$$

C. Un ressort à coefficient de rigidité $\varkappa = 10^3$ N/cm a été comprimé de $\Delta l = 1$ cm. Il a acquis ainsi une énergie $\Delta E = \varkappa\,(\Delta l)^2/2$. L'accroissement équivalent de sa masse

$$\Delta m = \Delta E/c^2 = 0{,}5\cdot10^{-16}\ \text{kg}.$$

On voit sans peine que dans tous ces trois derniers cas la variation de la masse est encore loin des limites de la précision expérimentale.

Cependant, les phénomènes astronomiques, dont, par exemple, les étoiles sont le siège, manifestent déjà une variation de masse impressionnante. Le rayonnement du Soleil en est une illustration.

Exemple. Les observations astronomiques ont permis d'établir que les rayons solaires perpendiculaires à 1 m² de surface terrestre dispensent par seconde à cette surface une énergie d'environ $1{,}4\cdot10^3$ J/(s·m²). Ceci permet de calculer l'énergie globale émise par le Soleil en 1 s

$$\Delta E = 1{,}4\cdot10^3\cdot4\pi R^2 = 4\cdot10^{26}\ \text{J/s},$$

où R est la distance de la Terre au Soleil. Par conséquent, le Soleil perd chaque seconde une masse

$$\Delta m = \Delta E/c^2 = 4{,}4\cdot10^9\ \text{kg/s}!$$

Une valeur immense à l'échelle terrestre; or, par rapport à la masse du Soleil cette perte est négligeable: $\Delta m/m = 2\cdot10^{-21}\ \text{s}^{-1}$.

En physique nucléaire il en est tout à fait autrement. C'est justement dans ce domaine qu'il a été possible pour la première fois de vérifier et de confirmer expérimentalement la loi d'interaction de la masse et de l'énergie. C'est que les processus nucléaires et les transformations des particules élémentaires s'accompagnent de très fortes variations de l'énergie comparables à l'énergie au repos des particules elles-mêmes. Nous étudierons cette question au § 7.5.

§ 7.4. Relation entre l'énergie et l'impulsion d'une particule

Il est clair que l'énergie E aussi bien que l'impulsion p d'une particule ont des valeurs différentes dans des systèmes de référence différents. Il existe pourtant une grandeur, une certaine combinaison de E et p qui est invariante, c'est-à-dire a la même valeur dans des éférentiels différents. Cette valeur est $E^2 - p^2c^2$. Vérifions s'il en est réellement ainsi.

En utilisant les formules $E = mc^2$ et $p = mv$, écrivons

$$E^2 - p^2c^2 = m^2c^4 - m^2v^2c^2 = \frac{m_0^2c^4}{1-(v/c)^2}\,[1-(v/c)^2],$$

ou, après la réduction,

$$E^2 - p^2c^2 = m_0^2c^4. \tag{7.12}$$

Le fait que dans le second membre la vitesse v disparaît signifie que la grandeur $E^2 - p^2c^2$ est indépendante de la vitesse de la particule et, par suite, du système de référence. Autrement dit, cette grandeur est en effet invariante et a la même valeur $m_0^2c^4$ dans tous les systèmes galiléens:

$$E^2 - p^2c^2 = \text{inv.} \tag{7.13}$$

Cette conclusion est très importante: dans de nombreux cas, elle permet comme nous allons le voir, de simplifier sensiblement l'analyse et la résolution de différents problèmes.

Voici encore deux relations utiles et très fréquentes dans les calculs. La première:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = E\mathbf{v}/c^2, \tag{7.14}$$

et la deuxième qui est la relation entre l'impulsion et l'énergie cinétique T de la particule; elle s'obtient aisément en portant dans (7.12) $E = m_0c^2 + T$; il vient

$$pc = \sqrt{T(T + 2m_0c^2)}. \tag{7.15}$$

Avec $T \ll m_0c^2$ cette dernière relation acquiert sa forme classique $p = \sqrt{2m_0T}$, et avec $T \gg m_0c^2$, elle devient $p = T/c$.

Exemple. En admettant que l'énergie au repos d'un électron est égale à 0,51 MeV. calculer

1) son impulsion *, si son énergie cinétique est égale à son énergie au repos;

2) son énergie cinétique, si son impusion est égale à 0,51 MeV/c, où c est la vitesse de la lumière.

1. D'après (7.15), avec $T = m_0c^2$ on obtient $p = \sqrt{3}\, m_0c = 0{,}9$ MeV/c.

2. Ce problème peut être également résolu à l'aide de (7.15). Mais on peut procéder plus simplement en utilisant (7.12):

$$T = E - m_0c^2 = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4} - m_0c^2 = 0{,}21 \ \text{MeV}.$$

Examinons encore la question très intéressante de la possibilité d'existence des particules *à masse au repos nulle* ($m_0 = 0$). Les formules

$$E = m_0c^2/\sqrt{1 - (v/c)^2} \text{ et } p = m_0v/\sqrt{1 - (v/c)^2}$$

* Notons qu'actuellement les impulsions des particules relativistes sont exprimées en unités « énergie/c », où c est la vitesse de la lumière. Par exemple, si l'énergie s'exprime en MeV (1 MeV = $1{,}6\cdot10^{-6}$ erg), l'impulsion, elle, s'exprime en MeV/c. L'utilisation de cette unité d'impulsion simplifie sensiblement de nombreux calculs.

entraînent qu'une particule de masse au repos $m_0 = 0$ ne peut posséder une énergie et une impulsion que dans le cas où elle se déplace à la vitesse de la lumière c. Les deux dernières formules acquièrent alors la forme 0/0. Cela ne veut pourtant pas dire que l'énergie et l'impulsion d'une telle particule sont indéfinies. Il s'avère que ces deux grandeurs ne dépendent pas de la vitesse, la relation entre l'impulsion p et l'énergie E étant donnée par la formule (7.14), où $v = c$, c'est-à-dire

$$p = E/c. \tag{7.16}$$

Ainsi, d'après la théorie de la relativité, l'existence des particules de masse au repos nulle est possible, ces particules ne pouvant se déplacer qu'à la vitesse c. Ce mouvement ne résulte pas de l'accélération précédente, mais constitue en général pour de telles particules l'unique état d'existence. Leur arrêt est équivalent à leur absorption (disparition). On sait actuellement que les photons et les neutrinos sont des particules de cette sorte.

Transformations de Lorentz de l'impulsion et de l'énergie. Supposons qu'une particule se déplace à la vitesse $v = dl/dt$ dans le système de référence K. La formule (6.13) entraîne que l'intervalle élémentaire

$$ds = \sqrt{c^2 (dt)^2 - (dl)^2} = cdt\sqrt{1 - (v/c)^2}.$$

En tenant compte de cette expression, mettons les projections de l'impulsion et de l'énergie d'une particule sous la forme suivante

$$p_x = \frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \frac{dx}{dt} = m_0 c \frac{dx}{ds}; \quad p_y = m_0 c \frac{dy}{ds};$$

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \frac{dt}{dt} = m_0 c^3 \frac{dt}{ds} = m_0 c \frac{c^2\, dt}{ds}.$$

L'invariance de l'intervalle ds entraîne que lors du passage à un autre système galiléen, p_x et p_y se transforment comme dx et dy, c'est-à-dire comme x et y, et l'énergie E, comme c^2dt, c'est-à-dire comme le temps. De cette façon on peut admettre la comparaison suivante:

$$p_x \sim x; \quad p_y \sim y; \quad E/c^2 \sim t.$$

En effectuant cette substitution dans les transformations de Lorentz (6.8), on obtient les transformations cherchées de l'impulsion et de l'énergie:

$$p'_x = \frac{p_x - EV/c^2}{\sqrt{1-(V/c)^2}}; \quad p'_y = p_y; \quad E' = \frac{E - p_x V}{\sqrt{1-(V/c)^2}}, \tag{7.17}$$

où V est la vitesse du système K' par rapport au système K.

Ecriture plus compacte des formules. Actuellement il est d'usage d'écrire toutes les formules de la mécanique relativiste sous une forme compacte en utilisant les abréviations suivantes:

1) les grandeurs mc^2 et pc sont notées m et p en les exprimant d'une façon correspondante en unités énergétiques (par exemple, en MeV):

2) toutes les vitesses s'expriment en unités de la vitesse de la lumière et sont notées β:

$$\beta = v/c; \tag{7.18}$$

3) le facteur d'usage fréquent $1/\sqrt{1-\beta^2}$ est noté γ; on le nomme *facteur de Lorentz*:

$$\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}. \tag{7.19}$$

Ces notations simplifient sensiblement aussi bien la forme des formules que tous les transformations et calculs. Voici en ces notations les formules fondamentales de la dynamique relativiste:

impulsion relativiste (7.3):

$$\mathbf{p} = \frac{m_0\boldsymbol{\beta}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma m_0 \boldsymbol{\beta}; \tag{7.20}$$

énergies cinétique (7.9) et totale (7.10):

$$T = m_0\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right) = m_0(\gamma - 1); \tag{7.21}$$

$$E = m = m_0 + T = \gamma m_0; \tag{7.22}$$

relation entre l'énergie et l'impulsion (7.12)-(7.15):

$$E^2 - p^2 = m_0^2 = \text{inv}; \tag{7.23}$$

$$\mathbf{p} = E\boldsymbol{\beta}; \tag{7.24}$$

$$p = \sqrt{T(T + 2m_0)}; \tag{7.25}$$

transformations de Lorentz de l'impulsion et de l'énergie (7.17):

$$\left.\begin{aligned} p'_x &= \frac{p_x - \beta E}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma(p_x - \beta E); \\ p'_y &= p_y; \\ E' &= \frac{E - \beta p_x}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma(E - \beta p_x). \end{aligned}\right\} \tag{7.26}$$

§ 7.5. Système de particules relativistes

A propos de l'énergie et de l'impulsion d'un système. Jusque-là nous nous sommes bornés à examiner le comportement d'une particule. A la différence de la dynamique d'une particule, la construction de la dynamique d'un système de particules est en théorie de la relativité, une tâche bien plus compliquée. Quoi qu'il en soit, dans ce cas-là aussi on peut établir plusieurs lois générales importantes.

Si nous nous intéressons au mouvement d'un système en tant qu'un tout unique en faisant abstraction de ses processus internes et en négligeant son étendue spatiale, nous pouvons admettre qu'il constitue un point matériel, une particule. S'il en est ainsi, un système de particules relativistes peut être caractérisé en tant qu'un tout unique par l'énergie totale E, l'impulsion $\mathbf{p}$ et la masse au repos

M_0, et nous pouvons affirmer que pour un tel système, les expressions obtenues précédemment sont également vraies.

Il reste à élucider ce qu'il faut entendre par énergie totale E, impulsion $\mathbf{p}$ et masse au repos M_0 d'un système comme d'un tout unique. Dans le cas général, si un système se compose de particules relativistes en interaction, son énergie totale

$$E = \sum m_i c^2 + W, \tag{7.27}$$

où $m_i c^2$ est l'énergie totale de l'i-ième particule (rappelons que cette grandeur ne comprend pas l'énergie d'interaction avec les autres particules) ; W, l'énergie globale d'interaction de toutes les particules du système.

En mécanique classique W représente l'énergie potentielle d'interaction des particules d'un système, grandeur ne dépendant, pour le caractère donné des interactions, que de la configuration du système. Or, il s'avère qu'en dynamique relativiste il *n'existe pas* de notion : énergie potentielle d'interaction des particules. Ceci est dû à ce que la notion même de l'énergie potentielle est intimement liée à l'idée de l'action à distance (transmission instantanée des interactions). Etant fonction de la configuration d'un système, l'énergie potentielle est déterminée à chaque instant par la disposition relative des particules à cet instant. Le changement de la configuration du système doit provoquer *instantanément* une variation de l'énergie potentielle. Lorsqu'en fait il n'en est pas ainsi (les interactions sont transmises à une vitesse finie), pour un système de particules relativistes il est impossible d'introduire la notion d'énergie potentielle.

Dans le cas général, pour un système de particules relativistes en interaction, l'expression de l'énergie d'interaction W, et par suite, de l'énergie totale E, ne peut pas s'écrire. Ceci concerne également l'impulsion d'un système, du fait qu'en dynamique relativiste l'impulsion n'est pas une grandeur indépendante de l'énergie E. La détermination de la masse au repos M_0 d'un système présente les mêmes difficultés ; dans le cas général on peut dire seulement que c'est une masse dans un référentiel où le système mécanique donné est au repos en tant qu'un tout unique (c'est-à-dire dans le système C).

Toutes ces difficultés font que la construction de la dynamique d'un système de particules relativistes est limitée aux cas les plus simples relativement peu nombreux. Nous n'examinerons ici que deux cas, dont celui du système de particules relativistes qui *n'interagissent pas entre elles* et celui de la collision de deux particules, qui présente un intérêt pratique.

Système de particules qui n'interagissent pas entre elles. Dans ce cas l'énergie totale E et l'impulsion $\mathbf{p}$ possèdent des propriétés ad-

ditives, et pour un système on peut les mettre sous la forme

$$E = \sum m_i c^2; \quad \mathbf{p} = \sum \mathbf{p}_i, \tag{7.28}$$

où m_i et $\mathbf{p}_i$ sont la masse relativiste et l'impulsion de l'i-ième particule du système. Puisque dans ce cas il n'y a pas d'interaction, les vitesses de toutes les particules sont constantes; donc, l'énergie totale et l'impulsion du système tout entier sont constantes dans le temps.

Introduisons la notion d'énergie au repos E_0 d'un système de particules en tant que son énergie totale dans le sytème C, où l'impulsion globale $\tilde{\mathbf{p}} = \sum \tilde{\mathbf{p}}_i = 0$, et le système est au repos comme un tout unique. De la sorte,

$$E_0 = \sum \tilde{E}_i, \tag{7.29}$$

où $\tilde{E}_i$ est l'énergie totale de l'i-ième particule dans le système C. Cela signifie que l'énergie au repos comporte en plus de l'énergie au repos de chaque particule, encore leurs énergies cinétiques $\tilde{T}_i$ dans le système $C: \tilde{E}_i = m_{0i}c^2 + \tilde{T}_i$.

Ceci se rapporte aussi, évidemment, à la masse au repos du système :

$$M_0 = E_0/c^2. \tag{7.30}$$

Il s'ensuit, en particulier, que la masse au repos d'un système n'est pas égale à la somme des masses au repos des particules isolées, et, notamment,

$$M_0 > \sum m_{0i}.$$

L'introduction de l'énergie et de la masse au repos E_0 et M_0 d'un système permet de considérer un système de particules relativistes qui n'interagissent pas entre elles comme une particule à énergie totale $E = \sum m_i c^2$, impulsion $\mathbf{p} = \sum \mathbf{p}_i$ et masse au repos $M_0 = E_0/c^2$, et affirmer que les expressions (7.12) et (7.14) sont également vraies pour un système de particules

$$E^2 - p^2c^2 = M_0^2 c^4 = \text{inv}, \tag{7.31}$$

$$\mathbf{p} = E\mathbf{V}/c^2, \tag{7.32}$$

où $\mathbf{V}$ est la vitesse du système de particules en tant qu'un tout unique, c'est-à-dire la vitesse du système C. D'après (7.32), cette vitesse peut être mise sous la forme

$$\mathbf{V} = (\sum \mathbf{p}_i)/(\sum m_i), \tag{7.33}$$

où m_i est la masse relativiste de l'i-ième particule du système. Notons que, quant à la forme, (7.33) coïncide avec l'expression non relativiste (4.9) de la vitesse du centre d'inertie d'un système.

Collision de deux particules. Examinons le processus de collision qui comporte deux étapes : d'abord la production d'une parti-

cule composée A^*, suivie dans le cas général, par sa désintégration en d'autres particules:

$$A_1 + A_2 \rightarrow A^* \rightarrow A_3 + A_4 + \dots .$$

Au cours du rapprochement, l'interaction des particules A_1 et A_2 peut devenir assez importante, et les formules (7.28) cessent d'être applicables. Pourtant, une fois que les particules nouvellement formées s'écartent à de grandes distances, ces formules peuvent être appliquées de nouveau.

Dans le cas considéré on peut montrer que la somme des énergies totales de deux particules initiales (quand elles se trouvent si loin l'une de l'autre que leur interaction est négligeable) est égale à l'énergie totale de la particule composite. Ceci se rapporte également à la désintégration, deuxième étape du processus. Autrement dit, on peut montrer que pour ce processus la loi de conservation de l'énergie totale est vérifiée sous la forme suivante:

$$E_1 + E_2 = E^* = \\ = E_3 + E_4 + \dots . \qquad (7.34)$$

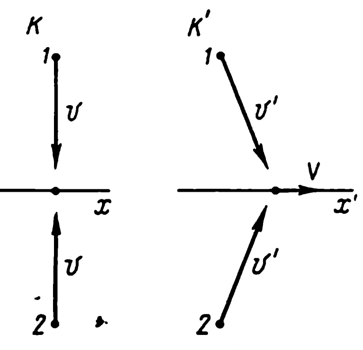


Fig. 132

L'exemple bien simple qui suit montre qu'il en est précisément ainsi.

Imaginons une collision entre deux particules identiques *1* et *2*, qui produit une certaine particule composée. Supposons qu'avant la collision les particules se mouvaient dans le système K l'une à la rencontre de l'autre à la même vitesse v, suivant la figure 132. Examinons ce processus dans le système K' se déplaçant à gauche à la vitesse **V** par rapport au système K. Puisque dans K la vitesse de chaque particule est perpendiculaire au vecteur **V**, d'après (6.14), dans K' les deux particules ont une même composante x de la vitesse, égale à V. Cette même vitesse sera propre dans le système K' à la particule nouvellement formée, dont la masse relativiste est notée M. La loi de conservation de l'impulsion avant et après la collision permet d'obtenir (pour la composante x de l'impulsion) $2m\,(v')\,V = MV$, où v' est la vitesse de chaque particule initiale du système K'. D'où

$$2\,m(v') = M,$$

c'est-à-dire la somme des masses relativistes des particules initiales est égale à la masse relativiste de la particule créée. Il en est de même dans le système K. En effet, pour une très petite valeur de la vitesse V, la vitesse v' est pratiquement égale à v, et la masse M, à la

masse au repos M_0 de la particule créée, de sorte que dans le système K

$$2\,m(v) = M_0.$$

Ceci rend évident que la masse au repos de la particule nouvellement formée est plus grande que la somme des masses au repos des particules initiales. L'énergie cinétique de ces dernières a subi une transformation dont il a résulté que la masse au repos de la particule créée a dépassé la somme des masses au repos des particules initiales.

Ainsi, nous avons montré que par suite de la conservation de l'impulsion du système la somme des masses relativistes des particules initiales est égale à la masse relativiste de la particule créée. Evidemment ceci se rapporte dans la même mesure à l'énergie totale. On peut donc affirmer que pour les étapes considérées de ce processus, la conservation de l'énergie totale sous la forme (7.34) a réellement lieu.

L'application de la loi de conservation de l'énergie aux processus nucléaires a permis, comme nous l'avons déjà dit à la fin du § 7.3, de vérifier expérimentalement la validité d'une des lois fondamentales de la théorie de la relativité, celle du principe d'interaction de la masse et de l'énergie. Voici deux exemples à titre d'illustration.

Exemple 1. Rendement énergétique des réactions nucléaires. Prenons la réaction nucléaire de la forme

$$A_1 + A_2 \rightarrow A_3 + A_4,$$

où à gauche il y a les noyaux initiaux, et à droite, les noyaux produits par la réaction. Appliquons à cette réaction la loi de conservation de l'énergie totale :

$$E_1 + E_2 = E_3 + E_4.$$

Puisque l'énergie totale de chaque particule peut être mise sous la forme $E = m_0c^2 + T$, où m_0 est la masse au repos du noyau correspondant ; T, son énergie cinétique, écrivons l'égalité précédente comme suit

$$(m_1 + m_2)\,c^2 + T_{12} = (m_3 + m_4)\,c^2 + T_{34},$$

où T_{12} et T_{34} sont les énergies cinétiques globales des noyaux avant et après la réaction. Il vient

$$T_{34} - T_{12} = (m_1 + m_2)\,c^2 - (m_3 + m_4)\,c^2.$$

Le premier membre de cette égalité est l'accroissement de l'énergie cinétique globale des noyaux du système donné, ce qu'on appelle *rendement énergétique de la réaction nucléaire* noté Q. Ainsi

$$Q = [(m_1 + m_2) - (m_3 + m_4)]\,c^2.$$

Cette grandeur peut avoir un signe quelconque suivant le caractère de la réaction. Donc, le rendement énergétique d'une réaction nucléaire est défini par la différence de masses au repos globales des noyaux avant et après la réaction. Toutes les grandeurs faisant partie de cette relation peuvent être mesurées expérimentalement avec une précision suffisante, en vérifiant par là même l'égalité en question.

Considérons une réaction nucléaire concrète

$$^7\mathrm{Li} + {}^1\mathrm{H} \rightarrow 2\,{}^4\mathrm{He}.$$

Les masses au repos mesurées de ces noyaux (en unités atomiques de masse) sont égales respectivement à 7,0160; 1,0078 et 4,0024 u.a.m. Ceci permet de calculer sans peine que sous l'effet de la réaction la somme des masses au repos des noyaux a diminué de 0,019 u.a.m. Compte tenu du fait que 1 u.a.m. correspond à l'énergie de 931,4 MeV, calculons $Q = 0{,}019 \times 931{,}4$ MeV = 17,7 MeV. Ce résultat correspond avec une grande précision aux données d'expérience.

Exemple 2. Désintégration d'une particule. Supposons qu'une particule au repos A_1 se désintègre spontanément en particules A_2 et A_3: $A_1 \rightarrow A_2 + A_3$. D'après la loi de conservation de l'énergie totale

$$E_1 = E_2 + E_3.$$

L'énergie totale de chaque particule étant $E = m_0c^2 + T$, l'égalité précédente devient

$$m_1c^2 = (m_2 + m_3)\, c^2 + T_{23},$$

où T_{23} est l'énergie cinétique totale des particules nouvellement créées. Cette énergie s'appelle *énergie de désintégration* Q. De la sorte

$$Q = [m_1 - (m_2 + m_3)]\, c^2.$$

Puisque Q est une grandeur essentiellement positive, la désintégration spontanée de la particule n'est possible que sous la condition

$$m_1 > m_2 + m_3,$$

c'est-à-dire si la masse au repos de la particule initiale est plus grande que les masses au repos de particules produites. Dans le cas contraire, la désintégration spontanée est impossible. L'expérience confirme pleinement cette conclusion.

Examinons par exemple, la désintégration du méson π. Il est établi expérimentalement que les mésons π chargés se désintègrent en méson μ et neutrino ν: $\pi \rightarrow \mu + \nu$. D'après les données tabulaires, les masses au repos de ces particules (en unités de masse au repos de l'électron) sont respectivement 273,2; 206,8 et 0. Il s'ensuit que sous l'effet de la désintégration la masse au repos diminue de 66,4 masses électroniques. La masse au repos de l'électron correspondant à une énergie de 0,51 MeV, l'énergie de la désintégration considérée $Q = 66{,}4 \cdot 0{,}51$ MeV = 34 MeV, ce qui s'accorde exactement avec les données d'expérience.

Le fait qu'une collision des particules et une désintégration d'une particule composite qui s'ensuit ne changent pas l'énergie totale du système (et, donc, son impulsion) amène une autre conclusion importante: pour un système la grandeur $E^2 - p^2c^2$ sera invariante non seulement par rapport à des référentiels galiléens différents, mais aussi pour les étapes du processus de collision indiquées précédemment.

Supposons, par exemple, que deux particules relativistes ont subi une collision, dont il en a résulté une nouvelle particule de masse au repos M_0. Si dans le système de référence K les énergies totales des particules avant la collision sont égales à E_1 et E_2, et leurs impulsions respectivement à $\mathbf{p}_1$ et $\mathbf{p}_2$, nous pouvons écrire tout de suite que lors du passage du système K (*avant* la collision) au système C (*après* la collision) on vérifie l'égalité suivante:

$$\underbrace{(E_1 + E_2)^2 - (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2 c^2}_{\text{système } K} = \underbrace{M_0^2c^4}_{\text{système } C}, \tag{7.35}$$

où on a tenu compte que dans le système C la particule créée est au repos.

L'invariance de la grandeur $E^2 - p^2c^2$ nous fournit un outil irremplaçable pour l'étude de différents processus, qui permet de simplifier sensiblement aussi bien l'analyse des processus que les calculs correspondants.

Exemple. Une particule de masse au repos m_0 et d'énergie cinétique T percute dans le système de référence K une autre particule au repos de même masse au repos. Calculer la masse au repos M_0 et la vitesse V de la particule composée produite par la collision.

En profitant de l'invariance de la grandeur $E^2 - p^2c^2$, écrivons:

$$E^2 - p^2c^2 = M_0^2c^4,$$

où le premier membre de l'égalité se rapporte au système K (avant la collision), et le second membre, au système C (après la collision). Dans notre cas $E = T + 2m_0c^2$; d'autre part, d'après (7.15) $p^2c^2 = T(T + 2m_0c^2)$; donc

$$(T + 2m_0c^2)^2 - T(T + 2m_0c^2) = M_0^2c^4.$$

On en tire

$$M_0 = \sqrt{2m_0(T + 2m_0c^2)}/c.$$

La vitesse de la particule créée est la vitesse du système C. D'après (7.32)

$$V = pc^2/E = c\sqrt{T(T + 2m_0c^2)}/(T + 2m_0c^2) = c\sqrt{T/(T + 2m_0c^2)}.$$

Problèmes du chapitre 7

Attention ! Dans les problèmes (7.4) à (7.11) on a utilisé les notations abrégées données à la fin du § 7.4 (par exemple, p et m_0 sont les notations abrégées des grandeurs pc et m_0c^2).

●**7.1. Mouvement sous l'action d'une force longitudinale.** Une particule de masse au repos m_0 commence à se déplacer sous l'action d'une force constante **F**. Trouver la dépendance entre la vitesse de la particule et le temps.

Solution. Multiplions les deux membres de l'équation (7.5) par dt; il vient

$$d\,(m_0v/\sqrt{1-(v/c)^2}) = Fdt.$$

Intégrant cette expression compte tenu qu'à l'instant initial $v = 0$, on obtient $m_0v/\sqrt{1-(v/c)^2} = Ft$, d'où

$$v(t) = (Ft/m_0)/\sqrt{1 + (Ft/m_0c)^2}.$$

Comparons l'expression obtenue avec l'expression classique. D'après la deuxième loi de Newton, $w = F/m_0$ et la vitesse $v_{cl} = Ft/m_0$; donc, l'expression précédente de la vitesse $v(t)$ peut s'écrire

$$v(t) = v_{cl}/\sqrt{1 + (v_{cl}/c)^2}.$$

Il est donc clair que $v < v_{cl}$, c'est-à-dire la vitesse réelle v d'une particule croît avec le temps plus lentement que v_{cl}, et de plus, avec $t \to \infty$, la vitesse $v \to c$ (fig. 133).

Fait curieux à noter: l'impulsion de la particule croît alors linéairement avec le temps; l'équation $d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}$ entraîne que $p = Ft$. C'est là une parti-

cularité caractéristique du mouvement relativiste: tandis que la vitesse de la particule tend vers une limite définie (c'est-à-dire devient pratiquement constante), son impulsion continue de croître.

● **7.2. Mouvement sous l'action d'une force transversale.** Une particule relativiste de masse au repos m_0 et de charge q se déplace dans un champ magnétique homogène constant dont l'induction est **B**. Le mouvement a lieu suivant une circonférence de rayon ρ dans le plan perpendiculaire au vecteur **B**. Chercher

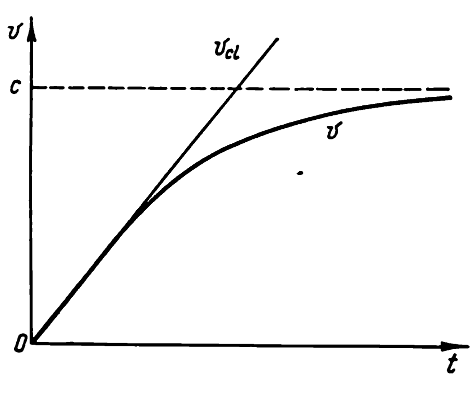


Fig. 133

l'impulsion et la fréquence angulaire de la rotation de la particule (vitesse angulaire).

Solution. Dans le cas considéré la particule se déplace sous l'action de la *force de Lorentz* $\mathbf{F} = q\,[\mathbf{vB}]$, où **v** est la vitesse de la particule. Puisque $\mathbf{F} \perp \mathbf{v}$, le module de la vitesse $v = \text{const}$ et l'équation (7.5) devient

$$m\mathbf{w} = q\,[\mathbf{vB}],$$

où m est la masse relativiste de la particule. En retenant que **w** est l'accélération normale, égale en module à v^2/ρ, dérivons l'équation précédente comme suit: $mv^2/\rho = qvB$. On en tire l'impulsion de la particule

$$p = mv = q\rho B. \quad (1)$$

De la sorte, pour une particule donnée, le produit ρB peut servir de mesure d'impulsion relativiste.

En vertu de (1), la fréquence angulaire d'une particule

$$\omega = v/\rho = p/m\rho = qB/m.$$

Il s'ensuit que la fréquence angulaire ω dépend de la vitesse de la particule: cette fréquence est d'autant plus petite que la vitesse de la particule, et donc, sa masse relativiste m sont grandes. Toutefois, à de faibles vitesses ($v \ll c$), $m \to m_0$ et

$$\omega = qB/m_0 = \text{const},$$

c'est-à-dire dans ce domaine la fréquence ω ne dépend pas pratiquement de la vitesse.

● 7.3. Un proton relativiste d'impulsion $\mathbf{p}_0$ a pénétré à l'instant $t = 0$ dans la région d'un champ électrique homogène transversal d'intensité **E**; de plus, $\mathbf{p}_0 \perp \mathbf{E}$. Trouver la relation entre le temps et l'angle de déviation ϑ du proton par rapport à la direction initiale du mouvement.

Solution. Après avoir choisi les axes de coordonnées (x, le long du vecteur $\mathbf{p}_0$; y, le long du vecteur **E**), écrivons l'équation (7.4) sous la forme de projec-

tions sur ces axes:

$$dp_x/dt = 0; \qquad dp_y/dt = eE,$$

où e est la charge du proton. Ces équations entraînent que

$$p_x = p_0; \qquad p_y = eEt,$$

ou

$$m_0v_x/\sqrt{1-(v/c)^2} = p_0; \qquad m_0v_y/\sqrt{1-(v/c)^2} = eEt. \qquad (1)$$

Le rapport entre ces dernières égalités donne

$$\operatorname{tg}\vartheta = v_y/v_x = eEt/p_0.$$

Fait curieux à noter: à la différence du cas non relativiste, à mesure que le temps croît ici v_x diminue. Pour s'en convaincre élevons les deux égalités (1) au carré, puis additionnons séparément leurs premiers et seconds membres:

$$\frac{m_0^2(v_x^2+v_y^2)}{1-(v/c)^2} = p_0^2+(eEt)^2.$$

En remarquant que $v_x^2+v_y^2 = v^2$, on obtient

$$\left(\frac{v}{c}\right)^2 = \left[1+\frac{m_0^2c^2}{p_0^2+(eEt)^2}\right]^{-1}.$$

En portant cette expression dans la première expression de (1), on trouve

$$v_x = c/\sqrt{1+(m_0c/p_0)^2+(eEt/p_0)^2},$$

c'est-à-dire, en effet, v_x diminue avec la croissance de t.

● **7.4. Diffusion élastique symétrique.** Un proton relativiste d'énergie cinétique T a subi une collision élastique avec un proton au repos; il en a résulté que les deux protons ont été projetés symétriquement par rapport à la direction initiale du mouvement. Calculer l'angle entre les directions du mouvement des protons après la collision.

Solution. Après la projection symétrique des protons leurs impulsions et leurs énergies doivent être les mêmes en module. Ceci est immédiat du triangle des impulsions (fig. 134) qui traduit la loi de conservation de l'impulsion. D'après le théorème des cosinus, ce triangle permet de tirer que

$$p^2 = 2p'^2 + 2p'^2\cos\theta,$$

d'où

$$\cos\theta = p^2/2p'^2 - 1.$$

En utilisant la formule (7.25) et en tenant compte que $T = 2T'$, où T' est l'énergie cinétique de chaque proton après la collision, on obtient

$$\frac{p^2}{p'^2} = \frac{T(T+2m_0)}{T'(T'+2m_0)} = 4\,\frac{T+2m_0}{T+4m_0},$$

où m_0 est la masse au repos du proton. En portant cette expression dans la formule de $\cos\theta$, il vient

$$\cos\theta = T/(T+4m_0).$$

Notons qu'à la différence du cas non relativiste pour lequel $\theta = \pi/2$, ici $\theta < \pi/2$.

● **7.5.** Un photon d'énergie ε a subi la diffusion par un électron libre au repos. Trouver l'énergie ε' du photon diffusé, si l'angle entre les directions de son mouvement avant et après la diffusion est ϑ.

Solution. Appliquons au processus donné les lois de conservation de l'énergie et de l'impulsion:

$$T_e = \varepsilon - \varepsilon'; \qquad \mathbf{p}_e = \mathbf{p} - \mathbf{p}',$$

où T_e et $\mathbf{p}_e$ sont l'énergie cinétique et l'impulsion de l'électron de recul; $\mathbf{p}$ et $\mathbf{p}'$, les impulsions du photon incident et diffusé. Le triangle des impulsions (fig. 135)

permet de tirer d'après le théorème des cosinus:

$$p_e^2 = p^2 + p'^2 - 2pp' \cos \vartheta.$$

En portant ici $p = \varepsilon$; $p' = \varepsilon'$ et $p_e = \sqrt{T_e (T_e + 2m_e)} = \sqrt{(\varepsilon - \varepsilon')(\varepsilon - \varepsilon' + 2m_e)}$, où m_e est la masse au repos de l'électron, on obtient après des transformations peu compliquées

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{1 + (2\varepsilon/m_e)\sin^2(\vartheta/2)}.$$

● 7.6. Deux protons se déplacent l'un à la rencontre de l'autre avec de mêmes énergies cinétiques T (dans le système de référence K). Calculer l'énergie cinétique T' d'un proton par rapport à l'autre.

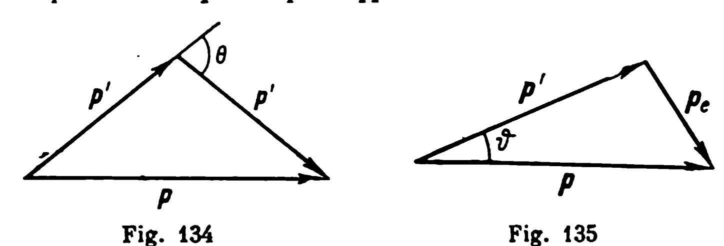


Fig. 134 Fig. 135

Solution. Utilisons l'invariance de la grandeur $E^2 - p^2$ en l'écrivant dans le système K (qui est ici en même temps système C) et dans le système de référence lié à l'un des protons:

$$[2(T + m_p)]^2 = (T' + 2m_p)^2 - T'(T' + 2m_p),$$

où m_p est la masse au repos du proton. Il vient

$$T' = 2T(T + 2m_p)/m_p.$$

Par exemple, pour les protons ($m_p \approx 1$ GeV) avec $T = 50$ GeV, $T' = 5 \cdot 10^3$ GeV. La possibilité d'obtenir un « gain » d'énergie aussi grand est à la base de la méthode des faisceaux lancés l'un à la rencontre de l'autre.

● 7.7. **Schéma énergétique d'une réaction nucléaire.** Une particule A_1 d'énergie cinétique T_1 percute un noyau au repos A_2 (dans le système K). Il en résulte les noyaux A_3 et A_4:

$$A_1 + A_2 \to A_3 + A_4.$$

Les masses au repos des particules sont égales respectivement à m_1, m_2, m_3 et m_4. Tracer le schéma énergétique de la réaction nucléaire pour deux cas: a) $m_1 + m_2 > m_3 + m_4$ et b) $m_1 + m_2 < m_3 + m_4$. Chercher pour le deuxième cas le seuil de l'énergie cinétique $T_{1\,\text{seuil}}$ de la particule incidente dans le système K.

Solution. La loi de conservation de l'énergie totale entraîne que dans le système C

$$\tilde{T}_{12} + m_1 + m_2 = \tilde{T}_{34} + m_3 + m_4,$$

où $\tilde{T}_{12}$ et $\tilde{T}_{34}$ so t les énergies cinétiques globales avant et après la réaction. En notant l'accroissement de l'énergie cinétique $\tilde{T}_{34} - \tilde{T}_{12}$ par Q, écrivons l'expression précédente comme suit:

$$Q = (m_1 + m_2) - (m_3 + m_4),$$

où Q est le rendement énergétique de la réaction nucléaire. Le schéma énergétique des deux cas est représenté sur la figure 136. Dans le cas *a* l'effet sera positif, $Q > 0$: l'énergie cinétique globale augmente par suite de la diminution

de la somme des masses au repos des particules du système; dans le cas *b*, c'est l'inverse.

Dans le dernier cas, comme le rend clair la figure 136, *b*, la réaction nucléaire n'est possible qu'avec $\tilde{T}_{12} \geqslant |Q|$. Ici le signe d'égalité correspond à la

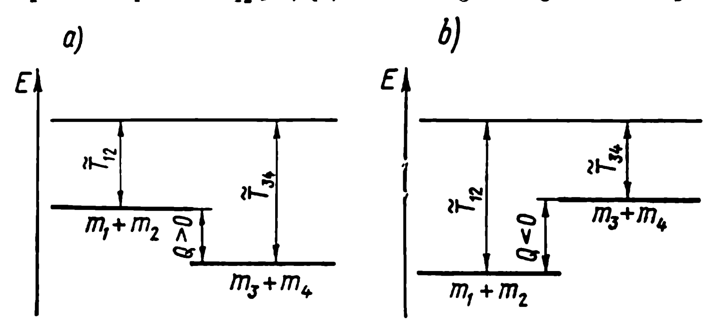


Fig. 136

valeur du seuil de l'énergie $\tilde{T}_{12}$. D'après (4.16), pour de faibles vitesses

$$T_{12\,\text{seuil}} = \frac{\mu v_{\text{rel}}^2}{2} = \frac{m_2}{m_1+m_2}\,\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_2}{m_1+m_2}\,T_{1\,\text{seuil}} = |Q|.$$

On en tire

$$T_{1\,\text{seuil}} = |Q|(m_1+m_2)/m_2.$$

● **7.8. Energie de seuil** (**énergie minimale nécessaire pour la réalisation du processus donné**).

1. Une particule relativiste de masse au repos m_0 percute une particule au repos de masse au repos M_0. La collision produit des particules de masses au repos m_1, m_2, . . . suivant le schéma

$$m_0 + M_0 \to m_1 + m_2 + \ldots .$$

Trouver l'énergie cinétique de seuil T_{seuil} de la particule incidente.

2. Trouver l'énergie de seuil d'un photon nécessaire pour produire une paire électron-positon dans le champ d'un proton au repos.

Solution. 1. Il est clair qu'il ne peut s'agir de l'énergie seuil que dans le cas où la somme des masses au repos des particules créées est supérieure à la somme des masses au repos des particules initiales. Pour trouver T_{seuil} utilisons l'invariance de la grandeur $E^2 - p^2$. Ecrivons l'expression de cette grandeur avant la collision, avec $T = T_{\text{seuil}}$, dans le système de référence où la particule M_0 était au repos, et après la collision, c'est-à-dire dans le système C:

$$E^2 - p^2 = \tilde{E}^2,$$

ou

$$(T_{\text{seuil}} + m_0 + M_0)^2 - T_{\text{seuil}}(T_{\text{seuil}} + 2m_0) = (m_1 + m_2 + \ldots)^2.$$

Cette expression tient compte que dans le système C au seuil de la réaction l'énergie cinétique des particules créées est nulle; leur énergie totale est donc égale à la somme des masses au repos des particules isolées. La dernière équation entraîne

$$T_{\text{seuil}} = [(m_1 + m_2 + \ldots)^2 - (m_0 + M_0)^2]/2M_0.$$

2. Ecrivons l'expression $E^2 - p^2$ avant l'interaction, dans le système de référence où le proton est au repos, et après l'interaction, dans le système C.

Pour la valeur de seuil de l'énergie ε du photon incident

$$(\varepsilon_{\text{seuil}} + M_0)^2 - \varepsilon^2_{\text{seuil}} = (M_0 + 2m_0)^2,$$

où M_0 est la masse au repos du proton ; m_0, la masse au repos de l'électron (positon). On en tire

$$\varepsilon_{\text{seuil}} = 2m_0 (1 + m_0/M_0).$$

Il est clair que pour la production d'une paire l'énergie d'un photon doit être supérieure à $2m_0$.

● **7.9. Désintégration d'une particule en mouvement.** Un méson π^0 relativiste de masse au repos m_0 s'est désintégré en vol en deux photons γ d'énergies ε_1 et ε_2 (dans le système de référence K). Trouver l'angle θ entre les directions des projections de ces photons γ.

Solution. Partons de l'invariance de l'expression $E^2 - p^2$ en l'écrivant pour le cas précédant la désintégration dans le système C, et suivant la désintégration, dans le système K:

$$m_0^2 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 - (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2,$$

où $\mathbf{p}_1$ et $\mathbf{p}_2$ sont les impulsions des photons γ. Transformons le second membre de cette équation en tenant compte que $p_1 = \varepsilon_1$ et $p_2 = \varepsilon_2$; il vient

$$m_0^2 = 2\varepsilon_1\varepsilon_2 - 2\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2 \text{ ou } m_0^2 = 2\varepsilon_1\varepsilon_2 (1 - \cos\theta).$$

On en tire

$$\sin(\theta/2) = m_0/2\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}.$$

● 7.10. L'impulsion totale et l'énergie d'un système de deux particules qui n'interagissent pas entre elles sont $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$ et $E = E_1 + E_2$. Montrer sous une forme explicite que les transformations de Lorentz pour l'impulsion totale $\mathbf{p}$ et l'énergie E s'accordent pour le système donné avec l'invariance de la grandeur $E^2 - p^2$.

Solution. En profitant des transformations de Lorentz de l'impulsion et de l'énergie (7.26) cherchons les projections de l'impulsion totale et de l'énergie dans un autre système de référence (hachuré) animé d'une vitesse β et à facteur de Lorentz γ correspondant:

$$p'_x = p'_{1x} + p'_{2x} = \gamma(p_{1x} + p_{2x}) - \gamma\beta(E_1 + E_2) = \gamma(p_x - \beta E);$$

$$p'_y = p'_{1y} + p'_{2y} = p_{1y} + p_{2y} = p_y;$$

$$E' = E'_1 + E'_2 = \gamma(E_1 + E_2) - \gamma\beta(p_{1x} + p_{2x}) = \gamma(E - \beta p_x).$$

On en tire

$$E'^2 - p'^2 = E'^2 - (p'^2_x + p'^2_y) = E^2 - p^2.$$

● 7.11. Un photon d'énergie ε dans le système du laboratoire percute une particule fixe A de masse au repos m_0. Calculer

1) la vitesse du système C de ces deux particules;

2) l'énergie du photon et de la particule A dans le système C.

Solution. 1. D'après la formule (7.32) la vitesse du système C

$$\beta = p/E = \varepsilon/(\varepsilon + m_0).$$

2. La transformation de Lorentz de l'énergie (7.26) entraîne que dans le système C l'énergie du photon

$$\tilde{\varepsilon} = \gamma(\varepsilon - \beta p) = \gamma(\varepsilon - \beta\varepsilon) = \varepsilon\frac{1-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \varepsilon\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}.$$

En y portant l'expression de β du point précédent, on obtient

$$\tilde{\varepsilon}=\varepsilon\sqrt{m_0/(2\varepsilon+m_0)}.$$

L'énergie de la particule A dans le système C

$$\tilde{E}_A=m_0/\sqrt{1-\beta^2}=(\varepsilon+m)\sqrt{m_0/(2\varepsilon+m_0)}.$$

Pour vérifier la validité des formules obtenues il faut utiliser l'invariance de l'expression E^2-p^2 lors du passage du système du laboratoire au système C:

$$(\varepsilon+m_0)^2-\varepsilon^2=(\tilde{\varepsilon}+\tilde{E}_A)^2.$$

ANNEXES

1. Mouvement d'un point en coordonnées polaires

En coordonnées polaires ρ et φ la position d'un point A sur un plan est définie par la donnée de la distance ρ à partir de l'origine O (fig. 137, *a*) et de l'angle φ entre le rayon vecteur $\boldsymbol{\rho}$ du point et la direction retenue OO', origine de la coordonnée angulaire φ.

Introduisons les vecteurs unités $\mathbf{e}_\rho$ et $\mathbf{e}_\varphi$ liés au point en mouvement A et dirigés dans le sens de l'accroissement des coordonnées correspondantes ρ et φ, suivant la figure 137, *a*. A la différence des vecteurs unités des coordonnées

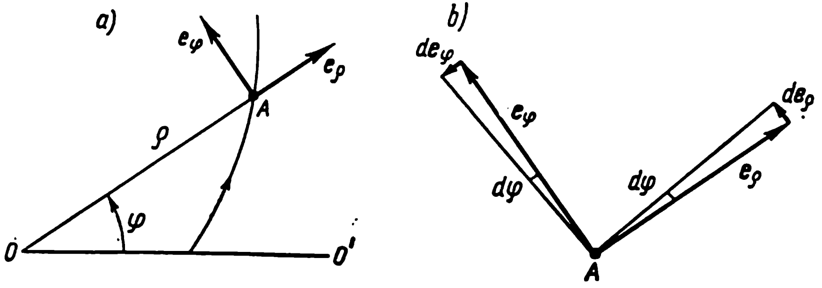


Fig. 137

cartésiennes, les vecteurs $\mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_\varphi$ sont *mobiles* (ils changent de direction avec le mouvement du point A). Cherchons leurs dérivées par rapport au temps, dont on aura besoin dans ce qui suit. En un intervalle de temps dt les deux vecteurs unités se tourneront lors du mouvement du point A dans le même sens et d'un même angle $d\varphi$ (fig. 137, *b*) en acquérant l'accroissement

$$d\mathbf{e}_\rho = 1 \cdot d\varphi \cdot \mathbf{e}_\varphi; \qquad d\mathbf{e}_\varphi = 1 \cdot d\varphi \cdot (-\mathbf{e}_\rho).$$

En divisant les deux expressions par dt, on obtient

$$\dot{\mathbf{e}}_\rho = \dot{\varphi}\, \mathbf{e}_\varphi ; \qquad \dot{\mathbf{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}\, \mathbf{e}_\rho, \tag{1}$$

où le point au-dessus du symbole indique la dérivation par rapport au temps.

Trouvons maintenant la vitesse et l'accélération du point A en écrivant son rayon vecteur $\boldsymbol{\rho}$ sous la forme

$$\boldsymbol{\rho} = \rho \mathbf{e}_\rho. \tag{2}$$

Vitesse $\mathbf{v}$ *d'un point*. Dérivons (2) par rapport au temps compte tenu de (1)

$$\mathbf{v} = \dot{\rho}\, \mathbf{e}_\rho + \rho\, \dot{\varphi}\, \mathbf{e}_\varphi. \tag{3}$$

c'est-à-dire les projections du vecteur **v** sur les vecteurs unités mobiles $\mathbf{e}_\rho$ et $\mathbf{e}_\varphi$ sont égales à

$$v_\rho = \dot{\rho}; \qquad v_\varphi = \rho\dot{\varphi}, \tag{4}$$

et le module du vecteur vitesse $v = \sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2}$.

Accélération **w** *d'un point.* En dérvant (3) encore une fois par rapport au temps, on obtient

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \ddot{\rho}\mathbf{e}_\rho + \dot{\rho}\dot{\mathbf{e}}_\rho + \frac{d}{dt}(\rho\dot{\varphi})\,\mathbf{e}_\varphi - \rho\dot{\varphi}\dot{\mathbf{e}}_\varphi.$$

Après des transformations peu compliquées on trouve en vertu de (1)

$$\mathbf{w} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\,\mathbf{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\varphi} - \rho\ddot{\varphi})\,\mathbf{e}_\varphi, \tag{5}$$

c'est-à-dire les projections du vecteur **w** sur les vecteurs unités $\mathbf{e}_\rho$ et $\mathbf{e}_\varphi$ sont de la forme:

$$\begin{aligned} w_\rho &= \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2, \\ w_\varphi &= 2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi} = \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\varphi}). \end{aligned} \tag{6}$$

Equation fondamentale de la dynamique en coordonnées polaires. L'équation fondamentale de la dynamique $m\mathbf{w} = \mathbf{F}$ en projections sur les vecteurs unités mobiles $\mathbf{e}_\rho$ et $\mathbf{e}_\varphi$ s'obtiennent aisément en utilisant les formules (6)

$$\left.\begin{aligned} m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) &= F_\rho, \\ m\frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\varphi}) &= F_\varphi, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

où F_ρ et F_φ sont les projections du vecteur **F** sur les vecteurs unités $\mathbf{e}_\rho$ et $\mathbf{e}_\varphi$ (fig. 138). Sur ce dessin $F_\rho < 0$ et $F_\varphi > 0$.

2. A propos du problème de Kepler

On appelle problème de Kepler le problème sur le mouvement d'une particule dans un champ de forces central dont la décroissance est inversement proportionnelle au carré de la distance au centre du champ. Cette loi est vérifiée par les forces de l'attraction newtonienne entre les masses ponctuelles (ou entre les corps possédant une symétrie sphérique), ainsi que les forces coulombiennes entre les charges ponctuelles.

Dans un tel champ l'énergie potentielle d'une particule est $U = -\alpha/\rho$, où α est une constante; ρ, la distance au centre du champ. Examinons le cas où $\alpha > 0$, c'est-à-dire la force agissant sur la particule de masse m est dirigée vers le centre du champ (attraction). Quelle sera la forme de la trajectoire de la particule en coordonnées polaires $\rho(\varphi)$, si pour $\varphi = 0$, $\rho(0) = \rho_0$, et sa vitesse perpendiculaire au rayon vecteur est égale à v_0 (fig. 139)?

Pour résoudre ce problème on applique ordinairement les lois de conservation de l'énergie et du moment cinétique. En coordonnées polaires ρ et φ, ces lois amènent

$$\frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2) - \frac{\alpha}{\rho} = E; \qquad m\rho^2\dot{\varphi} = L,$$

où E et L sont l'énergie mécanique totale et le moment cinétique de la particule par rapport au point O qui est le centre du champ. Ces deux grandeurs se trouvent sans peine à partir des conditions initiales.

Les équations mentionnées sont résolues de la façon suivante. D'abord, dans la première équation on passe de la dérivation par rapport au temps à la dérivation par rapport à φ, ce qui peut se faire à l'aide de la deuxième équation : $dt = (m\rho^2/L)\, d\varphi$. Ensuite, on sépare les variables ρ et φ, c'est-à-dire ramène l'expression obtenue à la forme $d\varphi = f(\rho)\, d\rho$. Et enfin, on intègre cette équa-

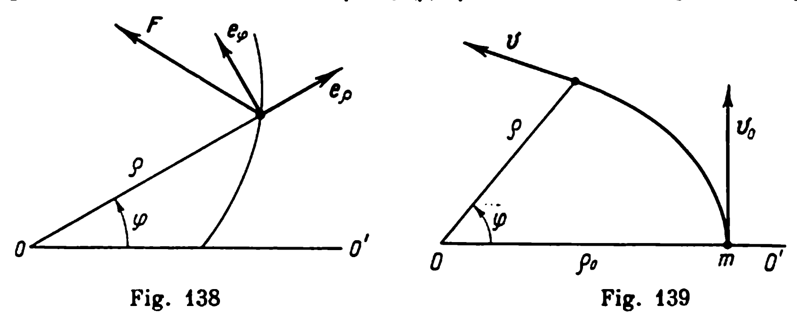


Fig. 138 Fig. 139

tion compte tenu des conditions initiales. Le résultat de l'intégration donne précisément la solution cherchée $\rho(\varphi)$.

Nous ne reproduirons pas en détail la marche assez lourde du calcul de ces équations (on peut le trouver dans un cours de physique théorique ou de mécanique quelconque). Bornons-nous seulement à l'analyse de la solution obtenue qui est de la forme

$$\rho(\varphi) = \rho_0/[a + (1 - a)\cos\varphi], \tag{1}$$

où $a = \alpha/m\rho_0 v_0^2$.

Les mathématiques enseignent que l'équation (1) détermine une conique. Suivant la valeur du paramètre a, ceci peut être une ellipse (cercle), une parabole ou une hyperbole.

1. Il est immédiat que pour $a = 1$, ρ ne dépend pas de φ, c'est-à-dire la trajectoire est un cercle. C'est la trajectoire qu'aura une particule à la vitesse v_0 qui s'écrit

$$v_{\mathrm{I}} = \sqrt{\alpha/m\rho_0}. \tag{2}$$

2. Pour toutes les valeurs du paramètre a telles que ρ soit fini, jusqu'à $\varphi = \pi$ y comprise, la trajectoire aura la forme d'une ellipse. Il résulte de (1) que pour $\varphi = \pi$

$$\rho(\pi) = \rho_0/(2a - 1).$$

Il est donc clair que $\rho(\pi)$ ne sera fini qu'avec $2a > 1$, c'est-à-dire à la vitesse $v_0 < v_{\mathrm{II}}$, où

$$v_{\mathrm{II}} = \sqrt{2\alpha/m\rho_0}. \tag{3}$$

3. Mais si $2a = 1$, c'est-à-dire si $v_0 = v_{\mathrm{II}}$, l'ellipse dégénère en parabole : la particule ne reviendra pas.

4. Avec $v_0 > v_{\mathrm{II}}$, la trajectoire aura la forme d'une hyperbole.

Tous ces trois cas sont visualisés sur la figure 140. Il convient de noter que pour les orbites elliptiques, le centre du champ coïncide avec l'un des foyers de l'ellipse : dans le cas où $v_0 < v_{\mathrm{I}}$, c'est le deuxième foyer et dans celui de $v_0 > v_{\mathrm{I}}$, c'est le premier foyer.

Notons que l'équation (1) décrit, par exemple, la trajectoire des planètes du Système solaire (alors, $\alpha = \gamma m M$; M est la masse du Soleil). Pour les mouvements des appareils cosmiques, les vitesses v_{I} et v_{II} sont respectivement la première et la deuxième vitesses cosmiques. Il est clair que leurs valeurs dépendent de la masse du corps qui est une source de champ.

3. Démonstration du théorème de Schteiner

Théorème. Le moment d'inertie I d'un solide par rapport à un axe des z arbitraire est égal au moment d'inertie I_C de ce corps par rapport à l'axe des z_C parallèle à l'axe donné et issu du centre d'inertie du corps, plus le produit de la masse du corps m par le carré de la distance a entre les axes:

$$I = I_C + ma^2.$$

Démonstration. Menons par l'i-ième élément du solide un plan perpendiculaire à l'axe des z, et dans ce plan trois vecteurs: $\boldsymbol{\rho}_i$, $\boldsymbol{\rho}_i'$ et $\mathbf{a}$ (fig. 141). Les deux premiers vecteurs caractérisent la position de l'i-ième élément du corps

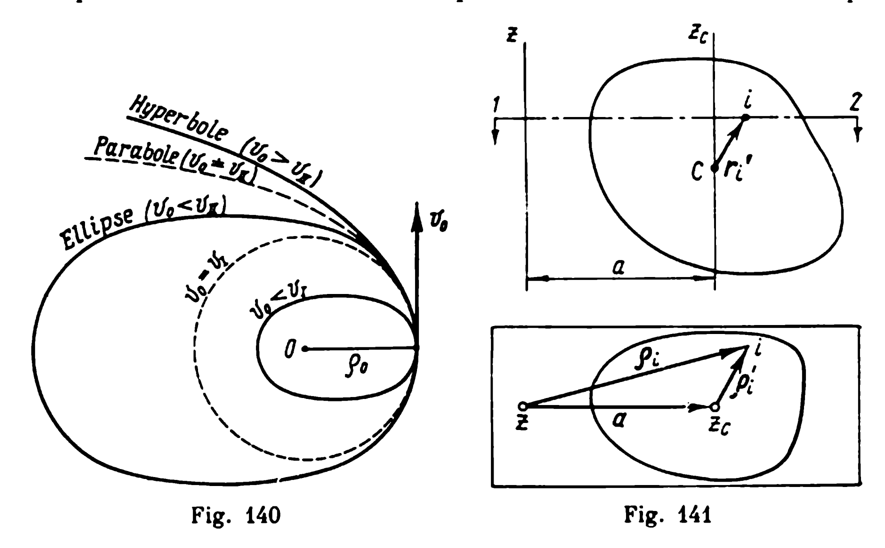


Fig. 140 Fig. 141

par rapport aux axes des z et des z_C, et le vecteur $\mathbf{a}$, la position de l'axe des z_C par rapport à l'axe des z. En utilisant la relation entre ces vecteurs ($\boldsymbol{\rho}_i = \boldsymbol{\rho}_i' + \mathbf{a}$), transformons l'expression du moment d'inertie du corps par rapport à l'axe des z:

$$I = \sum m_i \rho_i^2 = \sum m_i (\boldsymbol{\rho}_i' + \mathbf{a})^2 = \sum m_i \rho_i'^2 + 2\mathbf{a} \sum m_i \boldsymbol{\rho}_i' + \sum m_i a^2.$$

La première somme du second membre de cette égalité est le moment d'inertie du corps I_C par rapport à l'axe des z_C, et la dernière somme est simplement égale à ma^2. Il reste à montrer que la somme du milieu est nulle.

Soit $\mathbf{r}_i'$ le rayon vecteur de l'i-ième élément du corps par rapport au centre d'inertie; alors, par rapport à ce dernier, le vecteur $\sum m_i \mathbf{r}_i' = 0$. Mais $\boldsymbol{\rho}_i'$ est le *vecteur projection* du vecteur $\mathbf{r}_i'$ sur le plan perpendiculaire à l'axe des z. Il est donc clair que si le vecteur global est nul, la somme de ses vecteurs projections sur un plan quelconque est également nulle, c'est-à-dire $\sum m_i \boldsymbol{\rho}_i' = 0$. Ainsi, le théorème est démontré.

4. Formules d'algèbre et de trigonométrie

Racines de l'équation carrée $ax^2+bx+c=0$:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Quelques formules approchées. Si $\alpha \ll 1$, il vient

$(1\pm\alpha)^n=1\pm n\alpha$

$e^{\alpha}=1+\alpha$

$\ln(1+\alpha)=\alpha$

$\sin\alpha=\alpha$

$\cos\alpha=1-\alpha^2/2!$

$\operatorname{tg}\alpha=\alpha$

Formules trigonométriques principales :

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

$\sec^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha=1$

$\operatorname{cosec}^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha=1$

$\sin\alpha\cdot\operatorname{cosec}\alpha=1$

$\cos\alpha\cdot\sec\alpha=1$

$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1$

$$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$$

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$$

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$

$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$$

$$\operatorname{ctg}2\alpha=\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\alpha}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$

$$\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta}{1\mp\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta\mp1}{\operatorname{ctg}\beta\mp\operatorname{ctg}\alpha}$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha\pm\operatorname{ctg}\beta=\pm\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$$

$2\sin\alpha\cdot\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)$

$2\cos\alpha\cdot\cos\beta=\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)$

$2\sin\alpha\cdot\cos\beta=\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)$

5. Tableau des dérivées et des intégrales

Fonction	Dérivée	Fonction	Dérivée
x^n	nx^{n-1}	e^x	e^x
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	e^{nx}	ne^{nx}
		a^x	$a^x\ln a$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

Suite

Fonction	Dérivée	Fonction	Dérivée
$\ln u$	$\frac{u'}{u}$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{vu'-v'u}{v^2}$	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{ch} x$	$-\operatorname{sh} x$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\operatorname{th} x$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{cth} x$	$-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \; n \neq -1$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x$
$\int \frac{dx}{x} = \ln x$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x$
$\int \sin x \, dx = -\cos x$	$\int e^x dx = e^x$
$\int \cos x \, dx = \sin x$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x$
$\int \operatorname{tg} x \, dx = -\ln \cos x$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$
$\int \operatorname{ctg} x \, dx = \ln \sin x$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln (x+\sqrt{x^2-1})$

6. Généralités sur les vecteurs

Produit scalaire des vecteurs

$$\mathbf{ab} = \mathbf{ba} = ab \cos \alpha \, ;$$
$$\mathbf{a}(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{ab}+\mathbf{ac}.$$

Produit vectoriel des vecteurs

$$[\mathbf{ab}] = -[\mathbf{ba}] \, ; \quad |[\mathbf{ab}]| = ab \sin \alpha \, ;$$
$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}+\mathbf{c}] = [\mathbf{ab}]+[\mathbf{ac}].$$

Suite

Le produit mixte (vectoriel-scalaire) de trois vecteurs est un scalaire; il est numériquement égal au volume d'un parallélépipède construit sur ces vecteurs

$$\mathbf{a}[\mathbf{bc}]=\mathbf{b}[\mathbf{ca}]=\mathbf{c}[\mathbf{ab}];$$

$$\mathbf{a}[\mathbf{bc}]=-\mathbf{b}[\mathbf{ac}]=-\mathbf{a}[\mathbf{cb}].$$

Produit vectoriel double

$$[\mathbf{a}[\mathbf{bc}]]=\mathbf{b}(\mathbf{ac})-\mathbf{c}(\mathbf{ab}).$$

Produit des vecteurs dans la représentation q. Si

$$\mathbf{a}=a_1\mathbf{e}_1+a_2\mathbf{e}_2+a_3\mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{b}=b_1\mathbf{e}_1+b_2\mathbf{e}_2+b_3\mathbf{e}_3,$$

où $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ sont les vecteurs unités des coordonnées (réciproquement perpendiculaires et formant un triplet droit, conformément au tire-bouchon droit), il vient

$$\mathbf{ab}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3;$$

$$[\mathbf{ab}]=\begin{vmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=(a_2b_3-a_3b_2)\,\mathbf{e}_1+(a_3b_1-a_1b_3)\,\mathbf{e}_2+(a_1b_2-a_2b_1)\,\mathbf{e}_3.$$

Les règles de dérivation des vecteurs dépendant d'une certaine variable scalaire t:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\frac{d\mathbf{a}}{dt}+\frac{d\mathbf{b}}{dt};$$

$$\frac{d}{dt}(\alpha\mathbf{a})=\frac{d\alpha}{dt}\mathbf{a}+\alpha\frac{d\mathbf{a}}{dt};$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{ab})=\frac{d\mathbf{a}}{dt}\mathbf{b}+\mathbf{a}\frac{d\mathbf{b}}{dt};$$

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{ab}]=\left[\frac{d\mathbf{a}}{dt}\mathbf{b}\right]+\left[\mathbf{a}\frac{d\mathbf{b}}{dt}\right].$$

Le gradient d'une fonction scalaire φ:

$$\nabla\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{k},$$

où $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ sont les vecteurs unités des axes des coordonnées x, y, z.

7. Unités des grandeurs mécaniques dans les systèmes SI et CGS

Grandeur	Unité		Rapport SI/CGS
	SI	CGS	
Longueur	m	cm	10^2
Temps	s	s	1
Angle	rd	rd	1
Surface	m^2	cm^2	10^4

Suite

Volume	m^3	cm^3	10^6
Vitesse	m/s	cm/s	10^2
Accélération	m/s^2	cm/s^2	10^2
Fréquence des oscillations	Hz	Hz	1
Fréquence angulaire des oscillations	rd/s	rd/s	1
Vitesse angulaire	rd/s	rd/s	1
Accélération angulaire	rd/s^2	rd/s^2	1
Masse	kg	g	10^3
Densité	kg/m^3	g/cm^3	10^{-3}
Force	N	dyn	10^5
Pression	Pa	dyn/cm^2	10
Travail, énergie	J	erg	10^7
Puissance	W	erg/s	10^7
Impulsion	kg·m/s	g·cm/s	10^5
Impulsion d'une force	N·s	dyn·s	10^5
Moment d'une force	N·m	dyn·cm	10^7
Moment cinétique	$kg \cdot m^2/s$	$g/cm^2/s$	10^7
Moment d'inertie	$kg \cdot m^2$	$g \cdot cm^2$	10^7
Impulsion du moment d'une force	N·m·s	dyn·cm·s	10^7

8. Préfixes décimaux aux dénominations des unités

T	téra (10^{12})	c	centi (10^{-2})
G	giga (10^9)	m	milli (10^{-3})
M	méga (10^6)	μ	micro (10^{-6})
k	kilo (10^3)	n	nano (10^{-9})
h	hecto (10^2)	p	pico (10^{-12})
da	déca (10^1)	f	femto (10^{-15})
d	déci (10^{-1})	a	atto (10^{-18})

Exemples: nm nanomètre (10^{-9} m)
kN kilonewton (10^3 N)
MeV mégaélectronvolt (10^6 eV)
μW microwatt (10^{-6} W)

9. Certaines unités hors système

Longueur . . .	1 Å (angström) $= 10^{-10}$ m 1 u.a. (unité astronomique) $= 1{,}496 \cdot 10^{11}$ m 1 a.l. (année-lumière) $= 0{,}946 \cdot 10^{16}$ m 1 pc (parsec) $= 3{,}086 \cdot 10^{16}$ m

Suite

Temps	1 j (jour) = 86400 s
	1 an = $3{,}11 \cdot 10^{7}$ s
Masse	1 u.a.m. (unité atomique de masse) = $1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg
	1 t (tonne) = 10^{3} kg
Force	1 kgf (kilogramme-force) = 9,81 N
	1 tf (tonne-force) = $9{,}81 \cdot 10^{3}$ N
Pression . . .	1 bar = 10^{5} Pa (exactement)
	1 atm = $1{,}01 \cdot 10^{5}$ Pa
	1 mm Hg = 133 Pa
Energie	1 eV = $1{,}60 \cdot 10^{-19}$ J
	1 Wh = $3{,}6 \cdot 10^{3}$ J
Puissance . . .	1 ch (cheval-vapeur) = 736 W

10. Unités astronomiques

	Masse, kg	Rayon moyen, m	Rayon moyen de l'orbite, m
Soleil	$1{,}97 \cdot 10^{30}$	$6{,}95 \cdot 10^{8}$	—
Terre	$5{,}96 \cdot 10^{24}$	$6{,}37 \cdot 10^{6}$	$1{,}50 \cdot 10^{11}$
Lune	$7{,}34 \cdot 10^{22}$	$1{,}74 \cdot 10^{6}$	$3{,}84 \cdot 10^{8}$

11. Constantes physiques

Vitesse de la lumière dans le vide .	$c = \begin{cases} 2{,}998 \cdot 10^{8} \text{ m/s} \\ 2{,}998 \cdot 10^{10} \text{ cm/s} \end{cases}$
Constante de la gravitation universelle	$\gamma = \begin{cases} 6{,}67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2) \\ 6{,}67 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^3/(\text{g} \cdot \text{s}^2) \end{cases}$
Accélération de la chute libre (valeur normale)	$g = \begin{cases} 9{,}807 \text{ m/s}^2 \\ 980{,}7 \text{ cm/s}^2 \end{cases}$
Nombre d'Avogadro	$N_A = 6{,}025 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Charge élémentaire	$e = \begin{cases} 1{,}602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \\ 4{,}80 \cdot 10^{-10} \text{ u.é.s. CGS} \end{cases}$
Masse au repos de l'électron	$m_e = \begin{cases} 0{,}911 \cdot 10^{-30} \text{ kg} \\ 0{,}911 \cdot 10^{-27} \text{ g} \\ 0{,}511 \text{ MeV} \end{cases}$
Charge spécifique de l'électron . . .	$\dfrac{e}{m_e} = \begin{cases} 1{,}76 \cdot 10^{11} \text{ C/kg} \\ 5{,}27 \cdot 10^{17} \text{ u.é.s. CGS} \end{cases}$
Masse au repos du proton	$m_p = \begin{cases} 1{,}672 \cdot 10^{27} \text{ kg} \\ 1{,}672 \cdot 10^{-24} \text{ g} \end{cases}$
Unité atomique de masse	$1 \text{ u.a.m.} = \begin{cases} 1{,}660 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \\ 1{,}660 \cdot 10^{-24} \text{ g} \\ 931{,}4 \text{ MeV} \end{cases}$

INDEX